# IOHANN. BAPTISTAE CARACCIOLI

*CLERICI REGVLARIS*

IN PVBLICA PISANA ACADEMIA
ARITHMETICAE, ET ALGEBRAE VNIVERSAE
ATQVE
OPTICAE DIOPTRICAE CATOPTRICAE
PROFESSORIS

# PROBLEMATA VARIA MATHEMATICA.

*ACCEDIT*

EXAMEN MACHINAE
MOTVS PERPETVI.

FLORENTIAE ANNO MDCCLV.
TYPOGRAPHEIO CAESAREO

*PRAESIDVM PERMISSV.*

## *EMINENTISSIMO PRINCIPI*
## S. R. E. CARDINALI
# HENRICO ENRIQVEZ

IOHAN. BAPTISTA CARACCIOLVS
bene agere

*QUanta animi propensione Opus hoc meum Tibi destinem*, EMINENTISSIME PRINCEPS, *exploratum habere Te, valde confido. Pro certo enim habeo, studium meum erga Te, atque observantiam non animis modo, sed & prope oculis Tibi iugiter obversari. Id primum me impulit, ut ita agerem; tum necessitudinis plura vincula, quibus continemur; deinde incitavit utriusque nostrum voluntatis quaedam consensio; postremo aliquorum etiam studiorum convenientia. Etenim primum Theologicis disciplinis institutus es: postea ad philosophicas*

*quoque, & mathematicas animum adiecisti; quarum prima elementa Neapoli primùm Patria nostra à perito Viro; deinde in tuis oppidis ab alio satis gnaro illuc dedita opera deducto; qui vitam adhuc degit; intellexisti. In Vrbe eadem qua Graecam, qua Latinam linguam curasti edoceri. Sed in latina posthac subsistere voluisti; quarundam aliarum praesentium linguarum scientia ad utilitatem instructus. Ita Tua studia, Amplissime Vir, ad nostra; quae sane tenuissima; quadam cognatione pertinuerunt. In Theologicas vero doctrinas cum reliquis; quaequae sunt; sacrae Eruditionis adiunctis curam, cogitationemque omnem in posterum contulisti: & abunde illarum; de quo constat; adeptus es. Igitur Theologiae scita prima habes: quae tua sunt impense grata; & in quibus denique acquievisti. Posteriorem coniungis quidem Iurisprudentiam; quam Neapoli apud praeceptorem nominis celebritate proferendum Matthaeum Egizium Neapolitanum Civem didicisti. Ea ipsa litterarum studia; verùm praecipua semper Theologica; toto tempore* XXX. *admodum annorum; quo Romani Praesulis dignitate potitus es; & ex quibus decem circiter & octo Praeses illustriorum Pontificii Principatus Civitatum; atque ad Legationes quasdam missus arduas; denos vero, & amplius egisti Nuntius Apostolicus in Hispanicis Regnis apud duos deinceps Reges potentissimos* PHILIPPVM V. & FERDINANDVM VI. *atque temporibus difficilibus; de tua vero in munere unoquoque illorum, maximè ob temporum rationem, in postremo rectè officii administrandi prudentia, propositique in agendo sanctitate non à me nunc facta*

*verba*

*verba sunt ; sed iam tum fama erat ; ne intermisisti quidem , nedum non deseruisti ; litterata otia cum negotio permiscere satis eruditus . Quae duo ; si inscitia non vetet ; absit vero desidia ; geniove ; ubi per occupationem licet ; indulgendi cura , umbratilisque vita ; semper ; quantacumque sit agendarum rerum vis , & magnitudo ; bene simul poterunt sociari .*

*Porro iam Te à Geometria iuvenibus annis sedulo quidem addisci coepta minimè tunc deterrebat ; cum sacris addici iam mente volveres ; fallax illa aliquorum opinio , eum , qui Mathematica exercet studia , animos ad Deum , rerumque divinarum commentationem intentos minus posse habere : aut etiam ; quod absurdiùs diceretur ; inde avocari . Persuasissimum sibi habeat ; qui ita existimat ; siquidem suae rationis munere fungi velit ; in summo se errore iudicii versari ; cuius posse & argumentis , & exemplis nullo negotio convinci . Geometricae scientiae directo vere non spectant Divina : neque de illis agit Geometra . Id pueri norunt : communeque illud est huius cum ceteris ; Theologia sola seclusa ; disciplinis . At etiam quòd Geometricae cognitiones obstent , quo minus animum ad Deum , & coelestia attendamus ; & longe magis quòd ab illis porro mentem agant ( si neutrum dicitur ; nil in hac quaestione definitur ; & dicitur ; non disputatur enim de Theologia magis quàm ceterae omnes disciplinae ; non solum quàm Geometria ; ad Deum pertinente ; nostrasque meditationes in illo defigente ; quod liquet ) id , si affirmaretur , a recta ratione prorsus abhorreret .*

Duo

*Duo autem ſunt, via non directa; & obſtaculum; tantoque magis ſi recedendum ſit; omnino diverſa. Mentem a divinis prorſus amovent fallacia: & avertunt inepta. Geometria non niſi verum complectitur; non docet niſi grandia, & praeclara. Argumentum item illud eiusmodi opinationes invictè ſemper oppugnabit, & proteret; mathematicas litteras propter evidentiam Veritatis demonſtratae; ideoque a nobis per demonſtrationem perceptae; quod à cuncta humana doctrina procul abeſt; aptiſſimas omnium eſſe notitiae, & admirationi in nos inducendae Primi auctoris Veritatis. Vtraque vero increſcit ob tot, & tam mirabilia; quae Geometria perſcrutatur, invenit, & perſpicuè manifeſtat. Exemplis minimè vero deficimur. Et quidem de materia hac late meminimus in Commentario Epiſtolae D. Gregorii Nyſſeni; quae ſecunda eſt inter alias à nobis primo editas; ubi cum rationibus, tum exemplis noſtrorum Sanctorum Patrum, aliorumque Sacrorum Scriptorum rei veritatem in illuſtri loco ponere, confirmareque pro viribus eniſi ſumus. Vnus eſt Venerabilis Beda ibi indicatus; ſed opera ſilentio praetermiſſa non inane erit hic; ut magis id ratum agnoſcatur; enunciare. Sunt autem Arithmetica multa de numeris; & de propoſitionibus arithmeticis: de numerorum diviſione: de computo: de ratione Calculi: de Vnciarum diviſione. Et Chronologica, de argumentis Lunae: Ephemeris; ſive Computus Vulgaris: de Emboliſmorum ratione: de Cyclo paſchali: de ratione computi: de paſchae celebratione; ſive de aequinoctio Vernali: de temporum ratione: de temporibus*

*ribus. Et Astronomica de mundi coelestis constitutione: de Circulis sphaerae: & de Polo: de Planctarum, & signorum coelestium ratione: de astrolabio. Epistola etiam de divinatione Mortis, & Vitae existit inscripta, Petosyris ad Necepsum Regem Aegypti. Ergo opus hoc mathematicum, Vir praestantissime, quod tibi datum, dicatumque expetivi; lubens recipis; etiamsi Collegii sis S. R. E. Cardinalium; qui post primam Pontificis Maximi Potestatem, Summi sunt Sacrorum omnium Antistites. Quoniam Tibi cum sapientibus constat de mathematicis studiis; nequaquam illa, & Sacerdotium mutuo repugnare.*

*Inter proposita hoc libro Problemata*, EMINENTISSIME CARDINALIS, *invenitur illud de trapetio cuiusvis generis ex quatuor datis rectis lineis conformando; & intus circulum inscribendo; aut circa circulum describendo: vel de dato circulo intus trapetium inscribendo; aut circa describendo; rectis autem datis lineis nonnullae adponi debent conditiones: subinde ex illis quodvis genus trapetii, seu Figurae quadrilaterae circulo inscribendae, vel circum describendae constituetur. Huius problematis; quod in plura alia dispertitur; sicuti fere omnia reliqua; quodque in Elementis Geometriae Euclidis (de ingenuis loquor Elementis ipsiusmet Euclidis; quae neque castigata sint; neque emendata; adaucta; diminuta; in brevius adducta; neque propositiones Euclidis contineant in meliorem ordinem, melioremque, & novam formam relatas; aut magis necessarias è ceteris deromptas; excerptas. Quod idem fatum Apollonii fuit, & Archimedis)*

*dis) minime extat: neque nos apud aliquem Geometram illud vidimus; nostrae solutiones sola severa geometria absolutae fuerunt. Cum vero problema usum aliquando pro artibus posset obtinere; praxes, quas nuncupant; exposcerentur ad operis effectionem faciliorem. Nobis minime datum est illas aliquoties quaerendo investigare. acriora ingenia sollertius idem indagabunt; & postmodo adsequentur. Alind Problema de solido cochleari praeter difficultatem; qua reliqua non carent; historice solum aio; dignitate etiam aliqua videtur effulgere. De dimensione solidi in illo peragitur enati à Figura curva non in uno, & eodem plano iacente; sed in diversis; qualis Cochlea est; quae idcirco in plano nequit designari Igitur abstrusa erit generationis solidi geometrica inventio. Dimensionis autem geometricae solidi maior, minorve difficultas à generatione illius magnam partem proficiscitur. Et eiusmodi aliae curvae sunt; unaque est Epicyclois; quam currus in adductum orbem, aut multum angustam viam conversi rota; donec currus ex flexuoso fiat directus; describit tum antica, cum postica, utraque opposita conversioni; modo duae posticae rotae non subsistant; quod in arctissimis conversionibus accidere potest; tunc enim dicta postica non movebitur. Multiplices autem esse possunt eiusmodi conversiones; & spatiosae: in quibus currus per incertos flexus, etiam iussos, & propositos; si auriga sit artis vim equorum dispensandi scientissimus; deferetur. Sed de conversionibus coarctatis verba facimus. Eae igitur rotae duae antica, & postica, utraque*

*que*

*que opposita conversioni, singulae; dum aliae duae; si non sistant; quàmparvo arcu circa proprium axem verticalem, ideoque per punctum contactus soli, & rotae pervadentem revolvuntur; signare incipiunt puncto in contactu subiecti soli ex una parte accepto circulum basim curvae, eodem tempore, quo ex altera adhaerente parte aliud punctum per duplicem motum rotationis, & progressionis verti coepit in Epicycloidem; quam identidem progignit. Est vero is circulus basis curvae concentricus illi; circa quem in eadem conversione fertur extremum temonis; cuius centrum medium est punctum in foramine; quo axis duarum anticarum rotarum pertusus est; inserto clavo. Haec igitur Epicyclois describitur non in uno manens plano. Quod per exploratos motus illos demonstratur iuxta naturam Epicycloidis. Non ita Cyclois; quam unaquaeque rotarum rectâ decurrentis currus designat duplici quoque motu rotationis, & progressionis. Nam illa tum cum circulo genitore; qui est rota (rotam latiori significatione appellamus circulum) tum cum recta linea basi curvae sumpta super solo, aut molli solo impressa in uno invenitur plano.*

*Solutiones problematum plerumque sequuti sumus*, PERDOCTE VIR, *analyticas algebricas; aliquando tantum analyticas. Et ita geri nos opus erat; si eam mathematicae partem; quae arithmetica est, & algebra universa; ad alias adiunctam publicè in Accademia profitebamur; novo accademico munere nulli secundo aliorum, quae sapientissimus Imperator Caesar Etruriae Dominus in Pi-*

*ſana Academia ad illius decus, iuvenumque utilitatem providentiſſimè voluit de integro ſtatuta. Solutiones etiam ſyntheticae nonnullae occurrent; quarum aliquas algebricis ſubnexuimus; ad eum praecipuum finem (& id negotii vehementer curare voluimus,* VIR SAPIENTISSIME; *res enim cordi maximopere habebatur); ut omnis conſenſio Geometriae ſyntheticae, & algebricae non modo, ſed & etiam; quod caput eſt; algorithmi algebrae; quo illius calculi praecepta continentur; non quidem alicuius diſputationis ratiunculis, & commentis; vel metaphyſicorum acuminum apparatu; ſed reipſa per problematis ſolutionem, & per ea, quae inde conſectantur, clare & dilucide cerneretur. Id ſparſim, praeſertim vero in ſcholiis idcirco crebris perfectum eſt. Norunt autem in utraque Geometria edocti quantum verè altera alterius opem coniurantes amice poſcat; & exoret. Quandoquidem in conſtructione algebricae aequationis; quae problema ſemper concludit determinatum; & cuiusvis generis eſſe illud poteſt; Geometria ſynthetica algebricae ſuppetias ire poteſt; ſi propter aequationis plurium dimenſionum indolem, regulae; ſiquidem habeantur; deiiciendi illam; quod facere neceſſe; ad ſuam propriam ſedem, cum ad altiorem ea evecta ſit; id vero per praedictas normas, aut aliqua alia ratione cognoſcere analyſta debet; ita ſint involutae, uſuque difficiles, ut commode in propoſitam rem nequeant adhiberi. Synthetica tum Geometria conveniatur; per quam aliqua via ei perplexitati proſpiciatur. Alterna vice algebrica Geometria ſyntheticae ſubſidio venire poteſt tutiſ-*

*ſimo*

*ſimo cum locis Geometricis; ne curva una deſumatur pro altera: in quo maxime erraretur. Complectuntur autem loci Geometrici problemata indeterminata; quae per curvas conicas conficiuntur. Atque circa problemata determinata cuiusvis generis, & indeterminata, etiamſi ad curvas tantum pertinentia conicas plurima vertitur Geometria. Sola etiam analyſis; certo ea de cauſa, quia algebra comite deſtituta eſt; quamque unam veteres perſciebant; cum perſaepe eſt infirma; tum etiam bene pauca; ſi problema non vulgare ſit; miniſtrat analyſtae: ideoque parum ultra poteſt protendi. Ergo quantum admirabile, quantum utilitate plenum inventum fuit immittendi quinque Arithmeticae communis operationes in analyſim ſimplicem; quod cum aliis additis artificiis inde tamen uſque multam partem repetitis analyſim compoſuit algebricam? Huius Veterum analyſis ſpecimina conſpiciuntur apud Conicorum libros Apollonii libro ſecundo problemate* II. III. IV. VI. VII. VIII. *Perilluſtre autem eſt exemplum M. Archimedis lib.* II. *de Sphaera, & Cylindro problemate primo; quo, dato Cono, vel Cylindro Sphaera quaeritur aequalis: atque optima analyſis duas medias proportionales inter duas datas rectas lineas adinveniendas eſſe, illi patefecit. Multa quoque per eam analyſim effecta apud Pappum A. comperiuntur. Et veteres Geometrae arte hac eadem analytica fere omnia ſolvebant problemata; quam ex occulto nobis prodiderunt. Quod alibi in Nichomedea curva Conchoidis oſtendimus. Verum elumbis analyſis eſt; & non raro vacillans. Proponit idem Pappus lib.* IV. *propoſitione* XXXI. *problema; dato*

*parallelogrammo rectangulo; cuius unum latus producatur; ducere opus sit rectam lineam ex uno eius angulo; & facere partem eius interiectam inter latus alterum, & productum aequalem rectae lineae datae. Et analysi more veterum usus illud conficit per intersectionem duarum curvarum; nempe circumferentiae circuli, & hyperbolis inter asymptotos; quibus in analysi adsumptis exequitur etiam illius compositionem; quam nos constructionem dicere solemus: in quo deliquit. Problema enim est duarum dimensionum; ad quod iccirco solo circulo est opus. Id algebrica analysis invenit praebendo aut aequationem quatuor dimensionum; sed quae inferius ad duas deprimitur; sicuti effecit Cartesius in eodem problemate lib.* III. *Geometriae; aut aequationem duarum dimensionum; quô per reconditam algebricam analysim devenitur. Et idipsum ibidem admonuit Cartesius, sola incognita indicata recta linea adsumenda; alii vero solutionem adinvenerunt. Aberrare analystes item algebricus potest: at vero longe difficiliùs, quàm si algebrae careat adminiculo: id autem dicimus. Geometricam in his appellamus Algebram; saepe vero Geometriae nomen pro universa mathematica usurpatur. Perridiculum autem existimandum est, à partibus universae mathematicae algebram separare; quod liquet: attamen aliquando factum videtur. Quid dicam nescio: dicam tantum; semper magis firmum, ratumque experientia deprehendi pronunciatum illud: Felices erunt artes; si soli artifices de iis iudicabunt. Iam vero ex consensione demonstrata inter syntheticam, & algebricam Geometriam magis haec emicabit eximia disciplina;*

*plina; magisque nofcetur, quantum adolefcentes, praefertim naturalis philofophiae ftudiofos cohortari, ut illam miffam non faciant, par, & aequum fit quâ privatis fermonibus, quâ publicis Orationibus; quibus rectè inftituendorum ftudiorum praecepta exponuntur. Indeque quanta nota dignum erit, fi; dum inter illa praecepta, in loco, qui medicinae artem fpectat; commemorantur aliae mathematices partes; haec; de induftria, an fecus quaerere frugi, fobriumque Virum, & aliis etiam de cauffis pudeat; praetereatur? Hanc fane graviffimam doctrinam, non aliam quandam leviffimi momenti, nonnifi Vir in humanitate minime verfans, nilque liberaliter educatus magni facere minus volet. Difficilis, abftrufaque illius materies cuiusvis Iuvenum menti à nonnullis, certiffime plus aequo, obtendi folet. Praetextus non raro erit: & deceptio eft manifefta. Semper enim aliquis illorum erit; qui; fi in iftitutionem obnixe operam impendat; atque obfirmata fit voluntate; poterit contra difficultatem fidenter, & profpere ire; cum tamen mala perfuafione refugiat. Quis; fi ftudio non agat; concedere detrectabit; Iuvenem philofophicis ftudiis devotum; aut etiam qui ea fola cooptarit; idoneum Geometriae, phyficaeque Summi Nevvtonj; quae etiam horum temporum moris eft; reddere oportere? Atqui neminem latet, unice ad id opus effe penitiffima algebrica fcientia; fi utraque illarum in ipfomet auctore fedulo, & etiam omninò addifci aveatur. Quam Nevvtonianam phyficam; ut rem veram enuntiem; primi nos in Academiam intulimus; fcilicet primi; cum phyficam in illa profitebamur; Academicis iuvenibus expli-*

*explicavimus; proximè enim antea aut Cartesianae sententiae, aut Democriticae cum nonnullis Galilei propositionibus tradebantur.*

*Libra in examine machinae motus perpetui à nobis reiecta praesertim num.* IV. *&* VI. *non est quidem inflexa; quam esse posse, nos non praeterit. Habet enim Libra machinae radios duos non angulo coniunctos; qualis inflexa; verùm in duobus locis seorsum positos num.* IV. *aut ex una parte radium unum; & ex altera duos circa centra duo circumactos num.* VI. *Igitur abnormis Libra est; non inflexa; seu obliqua; uti de Libra inflexa rectè docuit propositione* XXXIX. *lib. de vi percussionis Neapolitanus noster Borellius natus Neapoli in Arce, quae dicitur Castrum Novum ann.* 1608. *quod legitur in eius Vita à P. Carolo Io: à Iesu Cler. Regularium Pauperum Matris Dei Scholarum Piarum Praepos. Generali conscripta, & egregio Borellii Libro de motu animalium praemissa. Parentemque suam Parthenopeam Vrbem eximius hic methematicus; & magnus Philosophus; de quo utroque per eius opera constat; cultor quidem physicae mechanicae cum Cartesio, Gassendo, Malpighio, Guglielminio, Montanario, aliisque ad laudem insignibus viris; non immechanicae; sed tamen magnus; nominat in Epistola ad Andream Concubletium Marchion. Arenae; qua ei suum librum de motionibus naturalibus à Gravitate pendentibus dedicat; dum claritate memorabilem Academiam in Concubletii aedibus Neapoli excitatam meminit; ad quam ipse cum abunde famam possidentibus Thoma Cornelio,*

*Fran-*

*Francisco de Andrea, Leonardo a Capua, Luca Antonio Portia, aliisque Neapolitanae Vrbis Civibus non quidem è Regno Neapolis, adscitus erat. Fallax enim opinio; sicuti tum priscorum, cùm praeter nuper dictos recentium etiam Lucae Tozzii; Alexandri Riccardi, Dominici Aulisii, Blasii Carofali, Ioh. Baptistae de Vico, Constantini Grimaldi, Antonii de Monforte, Hyacinthi Cristophori, P. Ioh. Baptistae de Miro O.D. Benedicti, Matthaei Egizii, Donati de Aste, & Nicolai Cirilli, atque Nicolai Capassii amborum modo non Neapolitanorum; aliorumque; & illorum; qui vitam adhuc agunt historia indicat de Neapolitanis Viris litteratis; erit; & nonnullorum fuit; Neapolitanam doctrinam non ita in iis insidere; quorum Vrbs Neapolis proprium natale solum; ut in multis illis, qui ab alieno caelo provinciarum Neapolim ventitant; & non raro illuc advecti quo pruna, & coctona vento. Verùm Civitati nostrae cerno equidem,* o NOBILISSIME mihi POPVLARIS, *in multis non parum invideri. In ipsa eadem Academia experimenta naturalia; sicuti praedictus Auctor ibidem litteris commendavit; adcuratissime pertentabantur; quae in praeclara Academia tentamentorum experientiarum Florentina; cuius pars magna Borellius; vestigata fuerunt. Idemque Borellius lib. quoque de vi percussionis cap.* XIII. *subtiliter percussionem corporum motibus obliquis sibi occurrentium pertractavit.*

*Non aliud quippiam de Opere,* EMINENTISSIME PRINCEPS, *praefari ad illius notitiam oportet; singularia enim problemata sunt; quorum natura per se patens;*

*cum*

*cum reliqua sint suis locis satis exposita; nullis prius per praefationem cognitis indigebat. Quae vero pauca de duobus illorum antea narrare opus erat, iam praedicta intellexisti. Id restat, quod significem; persuasissimum esse mihi, non modo Te ob virtutem, animique cultum; quem ex institutione, & studiis comparasti; dedicatum tibi opus benevole excepturum; verùm etiam fore, ut eisdem de caussis Libro non id; sicuti solet; ingrati, & modice non ferendum adveniat, in bibliothecae forulos; nonnullis semel, aut bis raptim evolutis paginis; amandari. Ergo à Te lubenti, hilarique animo; pro certo habeo; ille legetur; quando à negotiis vacabit; quae certo multa, & magna novi equidem futura in perampla nunc administranda Ravennate Provincia Tibi data, cum vix Sanctissimo Senatui fueris adiunctus. Quod si tua perlectum Librum commendatio subsequatur; id sane primo loco exceptorum à me fructuum laboris mei; quanticumque is sit; est autem minimi; putabo.*

# PROBLEMA PRIMVM GEOMETRICVM.

## LEMMA I.

PROBL. I. *TAB. I. FIG. I.*

SINT quatuor quaevis magnitndines datae $a.b.c.d.$ omnes inaequales; quarum minores tres in summa sunt maiores maxima $a$. Erunt rectangula duo quaevis ex illis bis accepta maiora quàm summa maior quadratorum duarum ex iisdem; dempta summa minori quadratorum aliarum duarum. Itaque erit $2ab + 2cd > aa + bb - cc - dd$. Et $2ac + 2ab > aa + cc - bb - dd$. Itemque $2cb + 2ab > bb + cc - aa - dd$. Demonstratur.

Nam est (*hypothesi*) $c + d + b > a$. quare erit $c + d > a - b$. & $cc + 2cd + dd. > aa - 2ab + bb$. & inde $2cd + 2ab > aa + bb - cc - dd$. Eadem ratione; cum sit $c + d + b > a$; erit etiam $d + b > a - c$. & $dd + 2db + bb > aa - 2ac + cc$. Inde $2db + 2ac > aa + cc - bb - dd$. Atque cum sit $c + d + b > a$; erit quoque $b + c > a - d$. Et $bb + cc + 2bc > aa - 2ad + dd$; indeque $2bc + 2ad > aa + dd - bb - cc$.

## COROLLARIUM.

Hinc idem erit; si ex quatuor datis quantitatibus omnibus inaeqnalibus tres omnifariam acceptae sint maiores reliqua. Etenim; si tres minores ex illis sint in summa maiores maxima; in-

 de

de necessario consequitur; tres omni modo acceptas esse maiores reliqua. Colligitur etiam ex demonstratione, verum quoque esse Lemma; si ex quatuor datis magnitudinibus inaequalibus tres sint aequales; maiores quidem in summa, quàm reliqua: aut duae sint aequales, & duae inaequales; vel denique duae sint aequales inter se; & duae inter se aequales; modo tres omnifariam acceptae sint maiores reliqua.

### SCHOLIVM.

Manifesta est necessitas conditionis Lemmatis. Nam si quatuor sint rectae lineae datae, seu quaevis magnitudines *p.m.n.q.* quarum minores tres non sint in summa maiores maxima; sive tres omnifariam acceptae non sint maiores reliqua; propositio non consistit.

FIG. II.

### LEMMA II.

Trapetium regulare; cuius nempe duo latera opposita sint parallela; alia vero minime; inscriptum Circulo habet duo alia latera opposita non parallela semper aequalia.

Sit enim Circulo *Q* inscriptum trapetium regulare *DABC*. cuius duo latera *DC*. *AB*. parallela. Et producantur *DC* ad *I*. atque *BA* ad *E*. Erit angulus *EAD* aequalis angulo *DCB*. propter trapetium inscriptum; atque aequalis etiam angulo *ADC*. propter parallelas. Igitur *ADC*. erit aequalis angulo *DCB*. Inde circumferentia *ABHC*. erit aequalis circumferentiae *BAPD*. & ablata communi *AFB*. erit circumferentia *DPA*. aequalis *CHB*. Et igitur chorda *DA*. erit aequalis chordae *CB*. Sunt vero *DA*. *CB*. latera duo trapetii opposita non parallela. Idem autem eodem modo ostendetur; si parallela fuerint duo latera opposita *DA*. *CB*. Ergo patet quod propositum est.

FIG. III.

Vera est etiam propositio conversa; posito quidem descripto intus circulum quadrilatero *DABC*. seu; quod idem est; posita descripta intus circulum Figura; in qua angulus *EAD* sit aequalis angulo *DCB*. Itaque dicatur. Ma-

EADEM FIG.

Manifesta est Propositio conversa; si nempe in Circulo sit $DA = CB$; & angulus $EAD =$ angulo $DCB$; esse $DC$ parallelam $AB$.

## PROPOSITIO I.

Ex quatuor datis rectis Lineis omnibus inaequalibus $CD$. $DA$. $AB$. $BC$. trapetium constituere; quod Circulo possit inscribi. oportet autem ut tres omnifariam sumptae maiores sint reliqua. Sit $CD$ maior $DA$. & $DA$. maior $AB$. quae maior $BC$. FIG. IV.

Ponatur factum esse quod quaeritur. Et sit trapetium performatum $ABCD$. quod Circulo possit inscribi. Iungatur diagonalis $AC$. quae dividet trapetium in duo triangula. Erit quidem trapetium irregulare (*Lemmat. II.*) nulla habens latera opposita parallela; atque cum Figura sit quadrilatera habebit angulos aequales quatuor rectis; cumque inscribenda sit Circulo; anguli duo oppositi erunt aequales duobus rectis. Sed nequeunt esse tam ex una parte, quàm ex altera duo oppositi ambo recti; etenim omne quadrilaterum habens duos angulos utraque oppositione aequales est per Elemen. Geometr. parallelogrammum; Igitur necessario duo anguli oppositi erunt aequales duobus rectis; & non erit uterque rectus. Quaeritur autem trapetium; non parallelogrammum. Quod etiam esse minime potest; cum quatuor datae rectae lineae sint omnes inaequales. FIG. V.

Ponatur angulus in $B$ obtusus; hinc illi oppositus in $D$. erit acutus.

Sint quoque ita latera $AB$. $BC$. $CD$. $DA$. collocata; ut summa quadratorum; quae ex $AB$. & $BC$. lateribus trianguli amblygonii $ABC$. conficiuntur; sit minor, quàm summa quadratorum, quae ex $AD$. & $DC$ lateribus trianguli oxygonii $ADC$. constituuntur. Sit etiam in hoc triangulo latus $AD$ minus la-

tere $DC$. Igitur ponatur latus $AB$. aequale datae rectae li-
FIG. IV. & V. nae $AB$. & latus $BC$. aequale datae rectae $BC$. & latus $AD$. aequale datae rectae $DA$. atque latus $DC$. aequale datae rectae $DC$.

Nunc. Est quidem angulus $ADC$ (*positione*) acutus, atque etiam (*positione*) acutus erit angul. $ACD$; cum sit latus $AD$. positum minus $DC$; unde angulus $ACD$. in triangulo $ADC$.
FIG. V. non erit (*hypothesi*) rectus, aut obtusus. quare necessario acutus, demittantur ex $A$ normales $AG$. supra $DC$. & $AL$. supra $BL$. cadet $AG$. intra $DC$. sed $AL$ extra $BC$. Sint denominatae rectae datae $AB$. $c$. & $BC$. $d$. atque $CD$. $a$. & $DA$. $b$. Ignota vero $BL$ dicta sit $x$.

Similia sunt triangula $ABL$. & $ADG$; cum tam anguli $ABL$; $ABC$; quàm (*hypothesi*) $ADG$; $ABC$ sint aequales duobus rectis. Inde erit ang. $ABL$ aequalis ang. $ADG$. Et sunt anguli $AGD$. $ALB$ recti, Hinc erit $AB . BL :: AD . DG$. scilicet $c . x :: b . \frac{bx}{c} = DG$. Quare $CG = CD - GD$ erit $= a - \frac{bx}{c} = \frac{ac - bx}{c}$. atqui est $AC^2 = AG^2 + GC^2 = AD^2 - DG^2 + GC^2$. quare erit $AC^2 = bb - \frac{bbxx}{cc} + aacc - 2acbx + bbxx = \frac{cbb + caa - 2abx}{c}$.

Est etiam $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BL$ [ XII. 2. *Elem.*] $= cc + dd + 2dx$. Igitur erit $cc + dd + 2dx = \frac{cbb + caa - 2abx}{c}$. Et $c^3 + cdd + 2cdx = cbb + caa - 2abx$. Atque $2cdx + 2abx = cbb + caa - c^3 - cdd$. Inde habebitur analogia; $2ab + 2cd . bb + aa - cc - dd :: c . x$. atqui est $c$. data quantitas; & necessario maior $x$. Ergo etiam maior esse debet $2ab + 2cd$ quàm $bb + aa - cc - dd$; quae datae etiam sunt quantitates. Sed est reipsa $2ab + 2cd$ maior quantitas, quàm $bb + aa - cc - dd$ (*Construction. & Corollar. Lemmatis I.*)

Item

Item est $bb + aa$ maior quantitas quàm $cc + dd$. quare $bb + aa - cc - dd$ est excessus inter quantitatem maiorem, & minorem. Ergo si adinveniatur quarta Geometrica post $2ab + 2cd$; & $bb + aa - cc - dd$, atque $c$; erit illa aequalis $x$; sive $BL$. Et inventus erit valor ipsius $x$.

Componetur autem Resolutio sic.

Dicatur $m$ comperta $x$. Sit latus $BC$ = datae rectae $BC = d$. producaturque $BC$ ad $L$. Fiat $BL = m$. atque ex $L$ educatur ad normam $LA$. Cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex data $AB = c$. & inventa $BL$ constituuntur. Est quidem $BL$ (*positione*) minor $AB$ propter angulum in $L$ rectum. Coniungantur $AB$. & $AC$. Erit quidem triangulum $ABC$. datum ob latus $AB = c$. & $BC = d$. [*constructìon.*) Atque ob latus $AC$; quod datum, & inventum est per id quod ponebatur. Etenim est $CA^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BL$. Invenitur igitur $CA$ per ignotam $BL$ determinatam. Et erunt in ipso triangulo duo latera omni modo accepta maiora reliquo; cum positum $ABC$ triangulum fuerit.

FIG. IV. & VI.

Deinde dabitur quoque triangulum $ADC$ per $AD = b$. & $DC = a$ (*constructione*); & per dictam $AC$. Vnde dabitur per id, quod ponebatur. Quare anguli in $A$. & $D$. & $C$. erunt quales esse debent; si trapetium iuxta hanc solutionem Circulo sit inscriptum. duo vero latera in eodem triangulo $ADC$ erunt quoque omnifariam accepta maiora reliquo; positum enim $ADC$. triangulum fuit. atque ambo triangula $ABC$, $CDA$. posita sunt conformare trapetium; quod Circulo sit inscriptum. Ergo ad datam rectam $AC$. datumque in illa punctum $A$. datus angulus $CAD$. constituatur. & sumatur $AD = b$. iungaturq; $DC$. erit $DC = a$ (*positione*); sed erat $AB = c$; atque $BC = d$. Igitur irregulare trapetium $ABCD$. ex quatuor datis rectis lineis performatum habemus; quod Circulo inscribatur. Id enim positum est.

FIG. VI.

Describatur nunc circa triangulum $ABC$ Circulus; cuius Centrum $Q$ (v. 4. *Elem.*); circa autem omne triangulum Circulus

culus describitur. Et per conversam propositionem vigesimae secundae lib. III. Elementorum; quae sane demonstrata est; pertransibit Circulus per quartum punctum $D$. Et circa quaesitum irregulare trapetium $ABCD$. erit Circulus $ABCD$. descriptus $Q. E. F.$

### SCHOLIVM.

Vera est conditio problemati adposita; quòd ex quatuor datis rectis lineis; unde trapetium conflandum est; tres sint omnifariam acceptae maiores reliqua. Quoniam patet, in omni Figura quadrilatera esse tria latera necessario maiora reliquo omnifariam accepta. Iungatur enim in Figura quadrilatera $FEPH$ diagonalis $EH$. Est $EF. + FH > EH$. Inde $EF + FH + EP$ erit $> EH + EP$. Igitur longe magis $EF + FH + EP$ erit $> PH$. Et ita de reliquis casibus.

FIG. VII.

### COROLLARIVM.

FIG. V.

Erat $CG = \frac{ac - bx}{c}$. quare erit $= \frac{ac - bm}{c}$. Inde quantitas positiva erit iuxta hanc solutionem. Quoniam est iuxta illam $a$ maior $b$. Iam vero $c$. erit semper maior $m$.

### PROPOSITIO II.

FIG. VI.

Sint omnia; quae antea. Et positio eadem. Est quidem angulus $ADC$. in trapetii triangulo $ADC$ acutus. itemque acutus $ACD$; cum sit latus $AD$. minus $DC$. uti propositione praecedenti dicebatur. Sed angulus $CAD$; propterea sane, quia latus $AD$. minus est $DC$, unde $DC$. maius latus subtendit angulum $CAD$; esse potest & acutus; & rectus; atque etiam obtusus in hac solutione. Itaque oportet illum determinare. Du-

Ducatur ex vertice $D$. perpendiculum $DI$. supra basim $AC$. erit $AC$. ad $CG$. veluti $DC$. ad $CI$. Sed datur $AC$. itemque cognita est per solutionem $CG$. quae quantitas positiva (*Coroll. praecedentis*). & datur $DC$. Ergo dabitur $CI$. quae si minor sit quàm $AC$. cadet perpendiculum $DI$. intus $AC$. & angulus $CAD$. erit acutus (ponitur quidem $ACD$. acutus.) Si maior; cadet $DI$ extra $AC$. ad partes $A$. Et ang. $CAD$. erit obtusus. Si aequalis sit $CI$. ipsi $AC$. cadet $DI$. in $A$. eritque $DI$. idem trapetii latus $DA$. & ang. $CAD$ erit rectus. Et circuli descripti diameter fiet latus $DC$. trapetii, atque tunc erit $CA$. media Geometrica inter totam basim $CD$. & segmentum $CG$. adiacens ipsi $CA$. quod triangulo rectangulo convenit; è cuius angulo recto $A$. perpendiculum $AG$. ad basim demittitur.

EADEM FIG.

Ponatur angulus $ACD$. obtusus in hac solutione; in qua semper angulus $ADC$. est acutus. Et rectè illa consistit. Nam ita aptentur trapetii latera ut sit $AD$. maior, & $DC$ minor ex quatuor datis rectis lineis. Et sit nunc $AD$, dicta $b$. atque $DC$. dicta $a$. Et fiant quae propositione I. & normalis $AG$. cadet extra $CD$. ad partes $C$. Et eadem erit, quae ibi analogia. Quoniam $DG$. erit $= \frac{bx}{c}$. Inde $CG$ erit $= \frac{bx - ac}{c}$. Et reliqua uti ibidem.

FIG. VIII

Iam vero eadem $CG$. fiet $= \frac{bm - ac}{c}$. Quae quantitas positiva; cum necessario $\frac{bm}{c} = DG$. sit maior $\frac{ac}{c}$; sive $a$. quae est $DC$. Inde si agatur perpendiculum $DI$. supra $AC$. uti hic superius; habebitur etiam $AC . CG :: DC . CI$. Et noscetur $CI$. Ergo casus hic est semper possibilis; scilicet ex quatuor datis rectis lineis semper trapetium fiet inscribendum intus Circulum cum angulo $ACD$ sumpto vel obtuso, vel acuto [Fig. VI. & VIII.]: qui nequit sane sumi rectus; sumeretur enim in analysi datum triangulum $ADC$. quod minime datur: & datum sumeretur id quod quaeritur: atqui angulus $CAD$. erit hoc casu necessario acutus. Igitur determinatus omni modo est angulus $CAD$. *Q. E. F.*

EADEM FIG.

FIG. VIII.

Nunc determinantur sic reliqui trapetii anguli. Nam dividitur illud in duo triangula $ABC$. $ADC$. Est $ABC$. amblygonium; cuius inveniuntur per constructionem anguli $ABC$. obtusus, & $BAC$. atque

FIG. VI. & VIII.

atque *BCA*. acuti. Cum vero datus fuerit obtusus *ABC*. dabitur quoque illi oppositus *ADC*. acutus in altero triangulo *ADC*. in quo determinantur quoque per constructionem alii duo anguli *CAD*. & *ACD*. sive *CAD*. acutus adveniat; sive obtusus; sive rectus; posito *ACD*. acuto; uti explicatum est; & sive in solutione sumatur *ACD*. acutus (*proposit. antecedenti*) sive obtusus; uti nuper. atqui datis angulis *BAC*. & *CAD*. uti & *BCA*. & *ACD*. dantur toti anguli *BAD*. & *BCD*. Ergo trapetii anguli omnes habentur definiti.

FIG. VI & VIII.

## COROLLARIVM.

Si iungatur diagonalis *BD* [Fig. VIII.] trapetii; erit angulus *ABD* obtusus; si sit ang. *ACD*. positus obtusus; & obtusus erit trapetii angulus *BCD*. cum sit maior ipso *ACD*.

Colligitur etiam ex propositione alia perfacilis constructio problematis: qualis videtur esse resolutio. Nam constituatur datum triangulum *ABC*. uti in propositione I. Modo quia datur *CI*. sicuti ostensum est; dabitur *ID*. ob datam *CD*. & angulum *CID*. rectum. Quare in recta *AC*. accipiatur, in loco ubi debet ex dictis; portio *CI*. data; atque ex *I*. educatur perpendicularis *ID*. aequalis quoque rectae datae. Connectantur *DA*. & *DC*. Eritque triangulum *ADC*. cum alio *ABC*. constituens totum quaesitum trapetium; quod circulo inscribatur. Constructio est longe facilior illa, quae propositione I. continetur.

FIG VI. & VIII.

## PROPOSITIO III.

Sint quae antea. Sed ex quatuor datis rectis lineis duae sint aequales, & duae inaequales. oportet quidem ut tres omni modo accepte sint maiores reliqua. Et eadem erit solutio; siquidem trapetii; quod circulo inscribatur; latera apte iuxta imperata mutuo componantur. atque tres casus sunt Figuris IX. X. XI. repraesentati.

Si casus sit Fig. IX. posset (*per dicta*) triangulum *ADC*. constitui Isosceles (Fig. VI.) si angulus *ACD*. sit acutus. (*proposit. I.*) Est quidem semper in hac solutione angulus *ADC* acutus: Igitur latus *DA*. & latus *DC*. sive recta *b*. & recta *a* fieret $= 4$. Et probe conficeretur solutio. Nam $16. + 16$. necessario est hoc casu

$> 9$

$> 9 + 4$. Et tunc; cum efficeretur $a = b$; analogia propositionis primae redderetur $2cd + 2aa . 2aa - cc - dd :: c . m$. Sed (*Coroll. Lem. I.*) & uti patet est; $2cd + 2aa$ maior quàm $2aa - cc - dd$. atq; esset $AB = c = 3$; & $BC = d = 2$. sive $AB = c = 2$ & $BC = d = 3$. & hoc casu semper foret $aa > cc$. & $aa > dd$. Vnde esset $2aa > cc + dd$. Et quantitas idcirco esset positiva $2aa - cc - dd$. Ergo patet, quòd proponitur. Posset sane idem triangulum $ADC$. non deligi Isosceles; FIG. VI. sed cuius sit latus alterutrum $= 4$. & alterum $= 3$. (*proposit. I. & II.*) Et probe quoque solutio per superiùs effecta absolveretur.

In casu; quem commostrat Fig. x. posset triangulum obtusiangulum $ABC$. Isosceles adsumi. Itaque esset $AB = c = 8$. FIG. VI. pariterque $BC = d = 8$. Et proba maneret solutio. Nam $64 + 64$. necessario est hoc casu $< 81 + 169$. Itaque analogia propositionis primae evaderet $2cc + 2ab . bb + aa - 2cc :: c . m$. Est (*Corol. Lem. I.*) $2cc + 2ab$ maior quàm $bb + aa - 2cc$. Etesset $AD = b = 9$. atq; $CD = a = 13$. sive $AD = b = 13$. Et $CD = a = 9$. [*propos. I. & II.*] Atq; hoc casu semper foret $bb + aa > 2cc$. Ergo $bb + aa - 2cc$ quantitas esset positiva. Posset quidem idem triangulum $ABC$. non constitui Isosceles; sed cuius alterutrum latus $= 8$. & alterum $= 9$. iuxta ea, quae in antecedentibus iussa fuere. Et solutio rite, ac rectè perficeretur per quae hactenus sunt pertractata. Quod vero spectat ad perquirendos angulos trapetii in omnibus tribus casibus huius propositionis; & in illis; in quibus aut triangulum $ABC$. aut $ADC$. sit Isosceles; simili ratione peragendum est, ac in Propositione II.

Quartus esset etiam Casus; si duae rectae forent inter se aequales, & duae aequales inter se. Verum; modo duo latera opposita; & duo opposita non locentur aequalia; esset enim tunc parallelogrammum; similis erit solutio. Nam esse deberet (ex dictis) in triangulo $ABC$. amblygonio latus $AB = BC =$ (*ex caus.*) 3. Et in triangulo oxygonio $ADC$. esse latus $AD = DC =$ (*exem. caus.*) FIG. VI.

5. Et eſt quidem $9 + 9 < 25 + 25$. Vnde recta ſervaretur analogia propoſit. primae; quae tunc eſſet $2cc + 2aa$. $2aa - 2cc$ :: $c . m$. Eſſet enim primus terminus maior ſecundo. ( *Corollar. Lemm. I.*) & per ſe patet. atque $2aa$ maior $2cc$. quare $2aa - 2cc$ quantitas eſſet poſitiva. Et duo dicta triang. forent aequicruria. Hinc; cum in triangulo $ADC$ foret $DA = DC$. eſt vero angulus in $D$. acutus in hac ſolutione; obvenirent ſemper neceſſario acuti alii duo in $C$. & $A$. Item totus angulus $BAD$. eſſet aequalis toti $BCD$. Et uterque; ob figuram inſcriptam Circulo; rectus. Et reliqua ſicuti in praecedentibus.

## PROPOSITIO IV.

Sint datae quatuor rectae lineae; quarum tres aequales. Et idem quaeratur. opertetque ſemper; ut tres omnifariam acceptae ſint maiores reliqua. qua de re duo ſunt caſus Figurarum XII. & XIII. & eadem quoque erit ſolutio; & conſtructio; conſtitutis inter ſe trapetii lateribus; ſicuti in antecedentibus praeceptum eſt. In caſu autem; quem exhibet Fig. XII. erit neceſſario; non quidem ut lubebit; ( *ex dictis*) triangulum $ADC$ Iſoſceles. Itaque erit $AD = b = 5$, Et $DC = a = 5$. atque $AB = c = 5$. & $BC = d = 3$. vel $AB = c = 3$. & $BC = d = 5$. Eſtque ſane hoc caſu ſemper $25 + 25 > 25 + 9$. atque angulus $ACD$ foret neceſſario acutus. Semper autem acutus $ADC$. Analogia vero propoſitionis primae fieret $2aa + 2ad$. $2aa - dd$ :: $a . m$. Et neceſſario hoc caſu ſemper $a$ maior erit quàm $d$. Vnde $2aa - dd$ quantitas eſt poſitiva. Liquet vero; ( *& Coroll. Lemm. I.*) eſſe $2aa + 2ad$ quantitatem maiorem quàm $aa - dd$. Ergo recta erit ſolutio. Et reliqua ſicuti in praecedentibus conficientur.

FIG. VI.

FIG. VI. Deinde in caſu Figurae XIII. triangulum obtuſiangulum $ABC$. neceſſario non arbitratu erit etiam ex dictis Iſoſceles. Igitur ita locentur latera; ut ſit $AB = c = 12$. & $CB = d =$

12

12. Atque $AD = b = 12$. Et $DC = a = 15$. five $AD = b = 15$. Et $DC = a = 12$. [*propofitione I. & II.*] Et eft hoc cafu femper $225 + 144 > 144 + 144$. Et praedicta analogia evadet primo cafu $2bb + 2ab . aa - bb :: b . m$. Et fecundo cafu $2aa + 2ab . bb - aa . a . m$. Et $2bb + 2ab$ eft $> aa - bb$. uti & $2aa + 2ab > bb - aa$ (*Coroll. Lemm. I*). Poftea (*conftruction.*) eft $a$ maior $b$. primo cafu. & $b$. maior $a$ fecundo cafu. quare primo cafu $aa - bb$. & fecundo $bb - aa$. erit quantitas pofitiva.

Itaque recte perficietur eadem Problematis folutio. Quod ad id autem, quod fpectat inveftigationem angulorum trapetii in ambobus cafibus huius propofitionis; pariter etiam praeftandum id eft, quod in propofitione fecunda.

## COROLLARIUM.

Perfpicuum eft; fi ex quatuor datis rectis lineis, quae trapetium componant; duae, aut tres fint aequales; facilius quibusvis cafibus (*Propofition. III. & IV.*) fuccedere Problema. Etenim inventa analogia; per quam fola quarta Geometrica quaerenda eft; paucioribus terminis tunc comprehendetur. Liquet autem, non omnes datas rectas lineas; ex quibus conftituatur trapetium; effe poffe aequales. Figura enim quadrilatera; cuius omnia latera fint aequalia; eft parallelogramma. [*per* XXXIV. *lib.* I. *Elem.*]

Igitur; quod ex antecedentibus confequitur; circa quodvis trapetium irregulare; cuius nempe nulla latera funt parallela; poteft Circulus defcribi. De regulari nunc; cuius fcilicet duo latera oppofita funt parallela; alia vero minime; inquirendum eft.

## PROPOSITIO V.

EX quatuor datis rectis lineis quibusvis $A . B . C . D$; oportet regulare trapetium componere. FIG. XIV.



Pro-

Profecto irregulare trapetium ex quibusvis datis rectis lineis fine problemate conformatur.

FIG. XV. & XVI. Si constitutum quaesitum trapetium fuerit $MPQN$. cuius latus $MP = A$. & $PQ = B$. atque $QO = C$. & $OM = D$. fueritque latus $MO$ parallelum $PQ$; & ducatur ex extremo puncto $Q$ lateris $PQ$. parallela $QN$. lateri $MP$. occurrens $MO$ in $N$; erit necessario diffectum trapetium in parallelogrammum $MPQN$, & triangulum $QNO$. Quoniam Figura quadrilatera est; & latera duo opposita habet parallela. Item triangulum ipsum $QNO$. constabit ex tribus datis rectis lineis; idest; ex una $QN$ aequali lateri uni trapetii $A$. ex altera $QO$; aequali lateri eiusdem trapetii $C$; atque ex tertia $ON$ aequali excessui inter alia duo trapetii latera; quae sunt parallela; nempe inter $D$.

FIG. XV. & XVI. sive $OM$. & $B$. sive $PQ$. aut $MN$. vel inter $B$. sive $PQ$, aut $MN$. & $D$. sive $MO$. Ergo, si datae quatuor rectae lineae compositurae trapetium eae sint, ut duae ex nuper dictis tribus rectis lineis $QN$. $NO$. $OQ$. trianguli $QON$ sint omnifariam sumptae maiores

FIG. XV. & XVI. reliqua; problema possibile est; si non maiores; problema nequaquam erit possibile: ita ut; positis datis lateribus duobus $MO$. & $PQ$ parallelis; quae iungant tertium datum latus $MP$; non adtingat quartum datum $QO$. ad $MO$. in $O$. aut nullo alio modo quatuor data latera in regulare trapetium poterunt aptari. Sit quidem propositum id problema possibile.

FIG. XV. & XVI. Ex datis tribus rectis lineis $OQ = C$; & $QN = A$. atque $ON$; quae aequalis sit praedicto excessui dato; constituatur triangulum $QON$. Postea efficiatur $NM$. supra $ON$ aequalis datae rectae $B$, atque ex $Q$ agatur $QP$ parallela $MN$ & aequalis eidem rectae $B$. Iungatur $MP$. Erunt ob aequales, & parallelas $NM$; & $QP$. rectae lineae illas ad easdem partes coniungentes $PM$. & $QN$ aequales & parallelae. Igitur erit $MP = QN = A$. & est $QO = C$. & $PQ = B$. (*constructio.*)

FIG. XV. Atqui; Cum sit $ON = D - B$; scilicet $ON = MO - MN$ (*constructio.*); erit $D - B = MO - MN$; aut; cum sit

ON

$ON = B - D$; scilicet $ON = MN - MO$ (*constr.*); erit $B - D = MN - MO$. Et est utroque casu $MN = PQ$ FIG. XVI. $= B$. Ergo erit utroque casu $MO = D$. Sed sunt parallelae $MO$; & $PQ$ pariter per fabricam. Igitur regulare trapetium ex quatuor datis rectis lineis $A$. $B$. $C$. $D$. nobis comparavimus $Q$. $E$. $F$.

## PROPOSITIO VI.

EX quatuor datis rectis lineis $AB$. $BC$. $CD$. $DA$. trapetium regulare constituere; quod Circulo inscribatur. Debent quidem aut duae, aut tres esse aequales. (*Lemm. II.*) Item oportet; ut tres omnifariam acceptae sint maiores reliqua; atque etiam; ut duae; quae non erunt parallelae; cum recta linea, quae est excessus parallelarum; sint omni modo sumptae reliqua maiores. (*Propositione V.*). FIG. XVII.

Sit quaesitum trapetium $ABCD$. cuius duo latera opposita parallela sint $AD$. $BC$. Erunt $AB$. & $CD$. alia duo opposita aequalia. (*Lemm. II.*) Ponatur autem angulus $ABC$. obtusus. Eritque $ADC$. acutus. Insunt autem duo anguli oppositi necessario aequales duobus rectis propter Figuram Circulo inscriptam; & non uterque rectus. Quod initio propositionis primae ostensum, & explicatum est. Sed est angulus $BAD$. aequalis $ADC$. propter parallelas; & inscriptam figuram; ob quam est angul. $ABE = ADC$. Ergo erit etiam $ABC$ angulus aequalis $DCB$ ob eamdem inscriptam Figuram. Inde obtusus erit angulus $DCB$. ducatur ex $A$ parallela $AH$ ipsi $DC$. occurrens $BC$ in $H$. Agatur etiam norma $AL$ supra $BC$. cadet $AH$ extra $CBL$; cum sit parallela ipsi $DC$; & angulus $DCB$; sive $DCH$ sic obtusus. FIG. XVII.

Nunc. Erunt; uti praemonebamus; duae datae rectae linae, aut tres necessario aequales. Itaque casus sunt omnes iidem ac illi; qui Propositione III. & IV. continentur. atqui in illis una

dua-

duarum ex datis quatuor rectis lineis est semper maior altera. FIG. XVII. Quare ita latera huius trapetii aptata ponantur; ut parallela $AD$. sit maior altera sibi parallela $BC$. Inde dictus supra excessus (*proposit.* V.) in adposita conditione semper obtinebitur. Erat vero $AB$ aequalis statuta $DC$. Tandem connectatur diagonalis $AC$. quae necessario trapetium in duo triangula dispertiet.

Sint datae $AB$; seu $DC = c$. & $AD = b = HC$. atque $BC = d$. Ignota vero $BL$ sit $= x$. Erit (per positionem) $LH, = HC - LB - BC = b - x - d$. Sed est $AL^2 = AB^2 - BL^2 = cc - xx$. Et etiam $AL^2 = AH^2 - LH^2$. Quare erit $cc - xx = cc - bb - xx - dd + 2bx + 2bd - 2dx$. Igitur erit $2bx - 2dx = bb + dd - 2bd$. atque erit $2b - 2d. \; b - d :: b - d. \; x$. Estque [*constructione*] $b$ maior $d$. Igitur tertia Geometrica accipiatur post $2b - 2d$. & $b - d$. cui in $BC$. abscindatur aequalis $BL$. extra $BC$. Extollatur ad normam $LA$; cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex $AB$; & inventâ $BL$ conficiuntur; est vero $AB$. maior [positione] quàm $BL$. Iungatur $AB$. atque ex $A$ ducatur $AD$ parallela ipsi $BC$; & aequalis $b$. adiungatur $C$. ad punctum $D$. Provenientque in triangulo $ADC$; uti & in triangulo $ABC$. duo latera omnifariam sumpta maiora reliquo per positionem. Posita nimirum sunt constituta triangula. Ergo compositum regulare trapetium erit $ABCD$. ex quatuor rectis lineis datis; quod Circulo inscribatur. Id enim positum est: atque si per conversam vigesimae secundae lib. III. Elemen. iam demonstratam FIG. XVIII. descriptus Circulus sit circa triangulum $ABC$; perducetur ille per quartum punctum $D$; Et inscriptum capiet trapetium exoptatum. *Q. E. F.*

## PROPOSITIO VII.

FIG. XVIII. QVaeruntur anguli in regulari trapetio; circa quod Circulus descriptus. Sint omnia quae antea. & eadem Fig. XVIII. Dantur

tur quidem, & noti fiunt per constructionem oppositi anguli *ADC*. & *ABC*. Inde per ea; quae praecedenti propositione ostenduntur; exstant cogniti anguli *BAD*; & *BCD*. cum ille demonstratus ibi fuerit aequalis angulo *ADC*. iste vero aequalis angulo *ABC*. Sed dantur per constructionem anguli *BAC*. & *BCA*. Ergo cognitos etiam adsequemur angulos *CAD*. & *ACD*. Igitur angulos omnes perspectos habebimus inscripti Circulo trapetii.

Deinde *AD*. datum est quidem maius latere *BC*. [*proposit. praecedenti*] potest vero esse maius; vel minus latere *DC*. Etenim inscriptum trapetium hoc regulare intus Circulum complectitur; veluti dictum est: (*praecedenti proposit.*) casus omnes propositionis III. & IV. cum duo latera sint necessario aequalia. Quare in illis casibus; quibus una inaequalium datarum rectarum; qualis est *AD*; est minor una aequalium; qualis *DC*. erit latus *AD*. minus *DC*; iis autem casibus; quibus una inaequalium; uti *AD*; est maior una aequalium: qualis *DC*; erit latus *AD*. maius *DC*.

FIG. XVIII.

Ergo si latus *DC* foret maius *AD*; posset quidem in trapetio regulari, haud secus ac in irregulari inscripto Circulo [*propositione II.*] esse hac parte angulus *CAD*. acutus; rectus; & obtusus. At vero angul. *BAD*. in trapetio regulari inscripto intus Circulum est necessario aequalis angulo *ADC* [*per antecedentem*]. Sed *ADC*. est angulus necessario acutus. Ergo & *BAD*. necessario erit acutus. Ergo acutus necessario semper ipse angulus *CAD* erit. Hinc etiam semper obtusus erit angulus *BCD*. Et quidem demonstratur (*per eandem*) ipse *BCD*. aequalis *ABC*. qui erat obtusus. Si datus ang. *CAD*. sit rectus; obveniet trapetii latus *CD*. diametrer ipsius Circuli. Sunt igitur anguli huius trapetii omnes definiti. *Q. E. F.*

S C H O L I V M.

Manifestum est; Si ex quatuor datis rectis lineis; quae regulare

EADEM FIG. XVIII.

lare trapetium componere debent Circulo inscribendum; duae sint aequales; aliae duae inaequales; neque triangulum $ABC$. neque $ADC$. fore Isosceles. cum opposita latera $AB$. $DC$, statui aequalia debeant (*Lemm. II.*). Qua ratione datae rectae duae aequales inter se; & duae inter se aequales esse nequeunt. Nam quadrilaterum foret parallelogrammum. Et quidem analogia propositionis VI. non consisteret. Igitur quicumque sint casus proposit. III. non erit in hoc trapetio triangulum ullum Isosceles. Si vero ex datis lineis tres sint aequales; qui duo esse possunt casus (*propositione IV.*) erit Isosceles triangulum $ABC$; si casus sit Figurae XIII. ipsius propositionis IV. sed erit Isosceles $ADC$, si casus sit Figurae XII. eiusdem propositionis. Sunt enim in nostro trapetio duo latera opposita $AB$. & $CD$. aequalia; & $AD$ est maius $BC$. atque primo casu Figurae XIII. erit $DC = BC$. inde etiam Isosceles erit $BCD$. Sed secundo casu Figurae XII. erit $AB = DA$. Inde etiam Isosceles erit $BAD$.

Est regulare trapetium aliud Isosceles; quod latera duo; quae non sunt parallela; habet inter se aequalia: & aliud scalenum; cuius eadem latera sunt inaequalia. Et inde nulla aequalia. Sed colligitur ex propositione VI. circa quodvis trapetium regulare; siquidem latera data aptari ad trapetium possint (*proposit. V.*); & duae datae rectae non sint aequales inter se; & duae inter se aequales;; uti nuper; circulum describi; atque (*Corollario proposit. IV.*) circa quodvis trapetium irregulare describitur quoque circulus. Igitur circa quodvis trapetium tum irregulare, cum regulare Isosceles (*Lemmat. II.*); et si duae datae lineae non sunt aequales inter se; & duae inter se aequales; Circulus potest describi.

## PROPOSITIO VIII.

TAB. II. FIG. XIX.

Sit datum trapetium $ABHC$. oportet illud circa Circulum describere. aut sint datae quatuor rectae lineae $AB$. $EH$. $HC$. $CA$ non omnes aequales; oportet ex illis trapetium componere.

nere, & circa Circulum describere. Sunt quidem tres omni modo acceptae maiores reliqua.

Ponatur esse $AEHC$. datum trapetium iam constitutum; & circa Circulum $Q$. descriptum. aut ponatur ex datis quatuor rectis lineis non omnibus aequalibus $AE$. $EH$. $HC$. $CA$. esse compositum trapetium $AEHC$. & circa Circulum $Q$. descriptum. Igitur contingant Circulum latus $AC$. in $B$. & latus $AE$. in $D$. Et latus $EH$. in $F$. Et latus $HC$. in $G$. Erit $AB = AD$. Et $DE = EF$: atque $BC = CG$. & $GH = FH$. quare erit $AB + EF = AD + DE$. Et $BC + FH = CG + GH$. Ergo erit $AB + EF + BC + FH$; scilicet $AC + EH = AD + DE + CG + GH$; scilicet $= AE + CH$.

Aliter per algorithmum. Quoniam denominetur $N$. latus $AB$. Igitur erit $AD = N$. Inde $DE$ erit $= AE - N$. Quare $EF$ erit etiam $= AE - N$. Ergo habebitur $FH = EH - AE + N$. pariterque $HG$ erit $= EH + AE + N$. & $CG = HC - EH + AE - N$. Sed est quoque $CG = BC = AC - N$. Igitur erit $HC - EH + AE - N = AC - N$. Inde $HC + AE$ erit $= AC + EH$. Sicuti antea. Consentit igitur reliqua Geometria cum algorithmo demonstrato.

Itaque ita trapetium datum sit; aut ex quatuor datis rectis lineis ita constitutum sit; si circa Circulum $Q$. describi debeat; ut duo opposita latera simul accepta aequalia sint duobus oppositis simul acceptis. Sive latera omnia sint inaequalia; sive duo aequalia; & duo inaequalia; aut duo aequalia inter se; & duo inter se aequalia. quo casu duo adjacentia latera $AE$. & $EH$. erunt aequalia; & duo adjacentia $AC$. & $CH$. aequalia; Cum duo opposita simul accepta latera esse debeant (*ex dictis*) aequalia duobus oppositis simul acceptis. Item quia secus; duo opposita latera essent aequalia; & duo opposita aequalia. quare quadrilaterum esset parallelogrammum; & non trapetium; quod quaeritur. atqui data sunt trapetii latera magnitudine. Ergo; cum datus jam; & cognitus sit illorum mutuus positus; si trapetium

EADEM FIG.

 circa

circa Circulum sit describendum; quod demonstratum est; erunt quoque dati anguli trapetii quatuor *A*. & *E*. & *H*. & *C*.

Itaque sit Circulus; cuius centrum *Q*; circa quem ponatur descriptum datum trapetium *AEHC*. Ex *Q*. agantur normales *QD*. ad trapetii latus *AE*. & *QF*. ad latus *EH*. atque *QG*. ad latus *CH*. & *QB*. ad latus *AC*. Iunganturque *EQ*. & *CQ*. Erunt (*hypothesi*) aequalia triangula *EQD*. & *EQF*. atque *CQB*. & *CQG*. Inde angulus *DEQ*. obveniet aequalis angulo *FEQ*. Et angulus *BCQ* aequalis *GCQ*. Igitur dividatur bifariam datus angulus *AEH*. à recta *EQ*. & bifariam datus angulus *ACH*. à recta *CQ*. Convenient *EQ*. & *CQ*. in puncto. quod sit *Q*. Ex *Q*. ducatur una normalis *QD*. ad latus trapetii *AE*. aut *QF*. ad latus *EH*. aut *QG*. ad latus *HC*. aut *QB*. ad latus *AC*. Vnum enim, idemque est. Et centro *Q*. intervallo *QD*. aut *QF*. vel *QG*. aut *QB*. describatur Circulus. Erit is quaesitus. Id enim positum est; cum unum, idemque positum fuerit punctum *Q*. Circuli centrum tam pro normali *QD*. aut *QF*. quàm pro normali *QG*; aut *QB*. atque unum idem *Q*. fuerit punctum concursûs duarum *EQ*. & *CQ*. ductarum per id, quod trapetium circa Circulum positum fuerit descriptum. *Q. E. F.*

EADEM FIG.

## S C H O L I V M.

Nequeunt ex quatuor dati trapetii iam constituti lateribus esse tria aequalia. aut si datae quatuor rectae lineae sint constituturae trapetium; nequeunt tres esse aequales; debent enim [per demonstrata] latera duo opposita simul accepta esse aequalia duobus oppositis simul acceptis.

Analysis haec omnes solvit casus; vel trapetium circa Circulum describendum irregulare sit; vel regulare Isosceles; aut Scalenum. atque si duo latera *AE*. & *EH*. aequalia sint inter se; & duo *CA*. *CH*. aequalia inter se; erunt anguli oppositi *EAC*. & *EHC*. aequales.

In-

Intus Circulum vero datum; aut circa Circulum datum describere trapetium; quod quidem minime esse potest datum; duo enim sola latera data esse possunt; problema est facillimae solutionis.

# PROBLEMA II. GEOMETRICVM.

## PROPOSITIO.

PROBL. II. FIG. I.

SIT data Elipsis $GDLF$. Cuius diameter positione data $GL$, & Centrum $O$. Quaeritur punctum in Curva $A$. unde si ordinetur $AB$; atque ducatur Tangens $AT$ occurrens diametro in $T$; fiat excessus inter quadratum ex $GL$. & rectangulum ex $GO$ in $GB$; ad excessum quadratorum $GL$. & $GB$; veluti $GL$ una cum $GB$ ad subtangentem $TB$.

Sit punctum $A$ in curva quaesitum: & ordinatim adplicetur $AB$: atque ducatur Tangens $AT$ conveniens cum diametro $GL$ in $T$. Est per doctrinam Conicorum $LB \cdot BG :: LT \cdot TG$. (xxxiv. *lib.* 1. *Conicor. Apollon.*) Inde erit $BO \cdot BL :: GB \cdot TB$. Etenim dicatur $GL$; $c$. & sit $GB = x$. Igitur erit $LB = c - x$. atqui est per dictam propositionem; $c - x \cdot x :: LG + GT$. $TG$. quare erit $c - x - x \cdot x :: LG + GT - TG \cdot TG$. scilicet; $c - 2x \cdot x :: c \cdot TG$. Et inde $TG = \frac{cx}{c - 2x}$

Quare $TB$ subtangens erit $= \frac{cx}{c - 2x} + x = \frac{2cx - 2xx}{c - 2x}$.

Inde erit $c - 2x \cdot 2c - 2x :: x \cdot TB$. sive $\frac{c}{2} - x$; nempe $BO$; erit ad $c - x$; seu $BL$; uti $GB$ ad $TB$. *Q. E. D.*

Demonstratur aliter Synthetice. Nam erat $LB \cdot BG :: LT$. $TG$. Quare erit $LB - BG$; ad $LT - TG$; sive ad $LG$; uti $GB$. ad $TG$. Hinc $TG$ erit ad $GB$. sicuti $LG$. ad $LB - BG$. & $TG + GB$; nempe $TB$, erit ad $GB$; uti $LG + LB - BG$; ad $LB - BG$: sive uti $2LB$. ad $LO + OB - BG$; aut uti $2LB$ ad $GO + OB - BG$; nempe uti $2LB$; ad $2BO$; & in-

de $TB$ ad $GB$ erit uti $2LB$ ad $2BO$. seu $BO.BL :: GB.TB$.

Nunc; denominatis diametro $GL$; & abſciſſa $GB$; uti antea; erit ſubtangens $TB = \frac{2cx - 2xx;}{c - 2x}$ per nuper demonſtrata. Sed eſt [per poſitionem] $\frac{cc - cx}{2}.cc - xx :: c + x. \frac{2cx - 2xx.}{c - 2x}$ Itaque ſi extrema duo mutuo ducta aequentur aliis duobus mutuo ductis; habebitur $c^4 - ccxx + c^3x - cx^3 - 2c^3x + 2cx^3 - 2ccxx - 2x^4 = 2c^3x - ccxx - 2ccxx + cx^3$. Inde compoſita aequatio erit $x^4 + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$.

Quae deinde conſtruetur ſic.

Inducatur parabola $ay = xx$. Igitur erit $aayy = x^4$. Et inſtructa aequatio reddetur $aayy + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$. Sive $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{aa} = 0$.

FIG. II. Nunc diametro $DE$. & parametro $= a$. deſcribatur parabola $KDI$. Cuius vertet $D$. ducatur $DH$. parallela ordinatis parabolae $KDI$. Et in illa ſumatur $DA = \frac{2c}{3}$; atque diametro $AH$; vertice extremo puncto $A$ ipſius $DA$; parametro vero $= \frac{3c^3}{2aa}$; atque ordinatis parallelis ipſi $DE$ ſit deſcripta ſecunda Parabola $BAC$. Dico harum duarum parabolarum interſectiones praebere valores ignotae $x$. Duae interſectiones neceſſario ſunt per deſcriptiones parabolarum; & non aliae. Sint autem interſectiones $M.M$. Vnde agantur ordinatae $MO$; & $MP$. ad Curvas. Sit $MO$ dicta $x$. in angulo $EDA$; atque $DO$ dicta $y$. Ordinatae nempe ſunt, & abſciſſae parabolae primae.

Patet, primam parabolam $KDI$ deſcriptam eſſe eam, quae inducta nova parabola eſt $ay = xx$. Nunc deſcripta $CAB$. ſecunda eſt parabola $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{aa} = 0$.

Nam

Nam fumatur interfectio $M$ in angulo $EDA$. Eft $MP = DO = y$. atque $PA = DA - DP = \frac{2c}{3} - x$. fed eft $MP^2$ aequale rectangulo; quod ex $AP$ in Parametrum efficitur. quare erit $yy = \overline{\frac{2c}{3} - x} \times \frac{3c^3}{2aa}$. Et inde $yy$ erit $= \frac{c^4}{aa} - \frac{3c^3x}{2aa}$; Et $yy + \frac{3c^3x}{2aa} - \frac{c^4}{2aa} = 0$. Accipiatur nunc interfectio $M$ in angulo $EDH$. atque eft ibi etiam $MP = DO = y$. atque $PA = DA + DP = \frac{2c}{3} - x$. Eft enim $DP$ in plaga averfa $= - x$. Vnde eadem provenit aequatio. Sed in utraque curva funt eaedem $y$; & eaedem & $x$. Ergo fufficiatur $\frac{x^4}{aa}$ parabolae primae loco $yy$ in parabola fecunda. Et proveniet aequatio, quae erat conftruenda $x^4 + \frac{3c^3x}{2} - c^4 = 0$.

Et cum duae fint neceffariae interfectiones Curvarum $M.M.$ duae funt radices aequationis poffibiles. Deeft vero in ipfa aequatione aliquis terminus; Ergo per algorithmum radices in illa funt verae falfis mixtae. Vnde una radix vera erit poffibilis; altera & poffibilis falfa. Erat $MO$ in angulo pofita $EDA = + x$. Inde erit oppofita $MO = - x$. ambae vero $DO$. funt $+ y$.

Itaque fumatur $GB$ fuper diametro $GL$ aequalis $MO + x$. Erat enim in analyfi $GB = + x$. Ex $B$ ordinatim adplicetur ad Ellipfim recta $BA$. Et ducta ex $A$. tangens $AT$. conveniet cum ipfa diametro in $T$; ita ut fubtangens $TB$. quarta fit in proportione Geometrica poft $GL^2 - GO \times GB$. & $GL^2 - GB^2$. atque $GL + GB$. Id enim pofitum eft. FIG I. & II.

Iam vero demonftratum eft, eandem obvenire aequationem conftructam; quae fane eadem eft cum inventa: fi adfumatur $- x$. Ergo accipiatur fuper eadem diametro $GL$ in parte averfa; nempe ex $L$ versùs $G$ portio $LE = MO (= - x.)$ pofitae FIG. II.

con-

FIG. I. contra primam acceptam $MO + x$. Et ordinetur ad Ellipsim recta $ED$. atque ex $D$. fiat $DP$ curvae tangens; concurret $DP$. cum diametro $GL$ in $P$. ita ut subtangens $PE$. sit quarta pariter Geometrica post $GL^2 - LO \times LE$. & $GL^2 - LE^2$; atque $GL + LE$. id enim positum est. Q. F. O.

## S C H O L I V M.

In inventa aequatione deest secundus terminus; unde summa radicum verarum erit aequalis summae falsarum. Sed etiam deest terminus tertius. Igitur coëfficiens termini tertii affectus signo — nequit scilicet esse minor tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini secundi. aut productum ex ultimo termino in coëfficientem tertii; si afficiatur illud signo —; esse minus tribus octavis partibus quadrati; quod ex coëfficiente constituatur termini quarti. Quae ambae necessariae conditiones severe in algorithmo demonstrantur; & nostram nos habemus demonstrationem; quibus; si alterutra earum desit; radices procul dubio erunt aut aliquae, aut omnes in aequatione quarti gradus fictitiae. In nostra vero aequatione ambae conditiones desiderantur. Hinc (*per algorith.*) inerunt in illa radices impossibiles. Sed duae non omnes. duo enim puncta necessario dantur concursûs Curvarum per descriptionem; sicuti dicebatur. Vnde duae; quae sunt radices; sunt possibiles. Ergo descriptio curvarum Geomtrica respondet algorith.°

Tum idem algorithmus demonstrat; si aliquo orbata sit aequatio termino; qualis haec aequatio eadem fuit; adesse in illa veras radices cum falsis commixtas. Et descriptio duarum harum curvarum; quae ipsam eamdem construit aequationem; duas FIG. II. habet $MO$. satisfacientes problemati; locatas in positu contrario; unde radices verae, & falsae aequationum algebricarum originem ducunt. Ergo ratum, constansque per haec sit quod de praedictis conditionibus, & de mixtione dicta radicum verarum, & falsarum algebrica demonstrat Geometria.

PRO-

# PROBLEMA III. ARITHMETICVM.

Sit propositum problema; duos numeros invenire; ex quorum quadratorum additione deducta latera faciant 78. & si illis mutuo ductis addantur eadem latera; progignatur 39.

Sit dictus unus $z$. alter $x$. Erit ob unam conditionem $zx + z + x = 39$. Inde $z + zx = 39 - x$. Et $z = \frac{39 - x}{1 + x}$. atque $zz = \frac{1521 - 78x + xx}{1 + 2x + xx}$. Sed ob alteram conditionem est $zz + xx - z - x = 78$. quare erit; si loco $z$. & $zz$ substituti eius valores fuerint expositi per $x$; aequatio $\frac{1521 - 78x + xx}{1 + 2x + xx} + xx - \frac{39 + x}{1 + x} - x = 78$. Et efficiatur multiplicatio per $1 + 2x + xx$. atque conformetur aequatio more consueto. & habebitur $x^4 + x^3 - 77xx - 273x - 1408 = 0$.

Habet 1404. divisorem 3. & comperta aequatio dividitur per $x - 3 = 0$. Est igitur $x = 3$. Sed erat $z = \frac{39 - x}{1 + x}$. quare erit $z = \frac{36}{4} = 9$. Sunt igitur duo numeri 3. & 9. & satisfaciunt quaestioni.

Sed; divisa inventâ aequatione per $x - 3 = 0$; remanet $x^3 + 4xx - 65x - 468 = 0$. Et 468 habet divisorem 9. atque haec ipsa aequatio dividitur per $x - 9 = 0$. remanetque $xx + 13x + 52 = 0$. Hinc erit etiam per hanc reductionem aequationis $x = 9$. Vnde $z = \frac{39 - x}{1 + x}$. erit $= \frac{30}{10} = 3$. Ergo habentur iidem duo numeri inventi.

Equatio $xx + 13x + 52 = 0$. nequit inferiùs deprimi; sed & duas habet radices fictitias. quod propter omnia signa + ; quae adsunt; Algebrae regulae demonstrant. Et quidem erit $xx$

$+ 13x$

$+ 13x + \frac{169}{4} = \frac{169}{4} - 52 = -\frac{39}{4}$. Igitur habebitur $x + \frac{13}{2} = \mp\sqrt{-\frac{39}{4}}$. Et duae erunt radices imaginariae ipsius $x$. scilicet $+\sqrt{-\frac{39}{4}} - \frac{13}{2}$. atque $-\sqrt{-\frac{39}{4}} - \frac{13}{2}$. Soli igitur duo numeri sunt aut rationales; aut irrationales; qui satisfaciunt quaestioni; 3. & 9.

## PROBLEMA IV. GEOMETRICVM.

PROBL. IV.

### P R O P O S I T I O I.

FIG. I. Sit datus ang. acutus $ABD$. cuius positione quidem datum sit latus $BD$. sed latus $AB$. magnitudine etiam datum. Quaeritur locus punctorum $M$; ita ut; iunctis rectis lineis $MB$. $MA$. quarum $MA$. secet $BD$ in $E$; sit triangulum $BME$. semper constans; & datum.

Ponatur esse series punctorum $M$. $M$. quaesita. Agatur $AF$ ad normam supra datam positione $BD$. Cadet (*hypothesi*) $AF$. inter $B$ & $D$. Ex quovis puncto $M$. ponatur ducta $MC$ ordinata supra $BD$. in dato angulo quovis obtuso $MCB$. atque ex $A$. ducatur $AO$. parallela $MC$. occurrens $BD$. in $O$. quae cadet extra $BF$. versus $D$. ob angulum in $F$. rectum; & angulum $AOD$. qui erit obtusus; cum sit $MC$. parallela $AD$. Ex eodem puncto $M$. sit ducta normalis $MI$. supra eamdem $BD$. quam patet cadere extra $BC$. versus $D$.

Dicantur datae, & cognitae $AF = b$. $AO = a$. $BO = c$. Et abscissae $BC$. sint $+x$. atque ordinatim positae $CM$ sint $+y$. Sit vero constans triangulum, & datum $BME = dd$.

Est $AO$. $AF$ :: $MC$. $ML$. sive $a . b . :: y . \frac{by}{a} = MI$;

Sed

Sed triangulum $BME$. est $= \frac{BE \times by}{2a}$. atque erat $= dd$. Inde erit $dd = \frac{BE \times by}{2a}$. Igitur $BE = \frac{2add}{by}$. atque $EC = BC - BE$ erit $= x - \frac{2add}{by} = \frac{byx - 2add}{by}$. Est etiam $OE = BE - BO = \frac{2add}{by} - c = \frac{2add - cby}{by}$. atqui (sumpto puncto $M$; unde ductae; uti supra; $MC. MI.$) similia semper erunt triangula $AOE. MCE.$ quare $AO. OE :: MC. CE.$ scilicet $a. \frac{2add - cby}{by} :: y. \frac{bxy - 2add}{by}$. Ergo erit $2addy - cbyy = abxy - 2aadd$. Et performata more consueto aequatio efficietur $yy - \frac{2addy}{bc} + \frac{axy}{c} - \frac{2aadd}{bc} = 0$. Quae hyperboles est asymptotica.

Componetur autem sic.

Abrumpatur in $BD$ portio $BQ = \frac{2dd}{b}$. Ex $Q$ agatur $QK$ parallela $AO$; seu ordinatis loci quaesiti. Et sit in $QK$ portio $QH = AO = a$. Ex $H$ educatur $HL$ parallela $BD$. Tum ex eodem $Q$ agatur $QXV$. parallela $AB$. secans $HL$ in $L$. Et cadet $QXV$ intra angulum $BQK$. Erat enim ang. $BQK$ aequalis $AOD$. & inde obtusus. atque erit angulus $BQX$ aequalis $ABD$. Vnde erit acutus. Et datum est triangulum $QLH$; ob $QH$ latus datum; & angulum $QHL = DQH = AOB$ dato. & angulum $QLH = BQL = ABD$ dato. Dicaturque $QL = m$. FIG. II.

Nunc efficiatur $QZ = QL = m$. ad partes $D$. Ex $Z$. agatur $ZT$. parallela $QLX$. Et fiat $ZT = BQ = \frac{2dd.}{b}$ deinde asymptotis $QDR$. & $QXV$ describatur hyperboles $TP$; per punctum $T$. Erit ea limes quaesitus punctorum $M$.

Sit enim quodcumque $M$ in Curva. Vnde ducantur $MC$. EADEM FIG.

parallela $AO$. & $MI$ parallela $AF$. atque $MN$ parallela $AB$; five $QVX$. quae cadent fupra $BD$ pofitae ficuti in fchemate; propter dictam aequidiftantiam. Modo erit (*conftruction.*) $AO$. $OB$ :: $MC$. $CN$. fcilicet $a \cdot c :: y \cdot \frac{cy}{a} = CN$. Sunt enim $BC = + x$. abfciffae; & $CM = + y$ ordinatae loci quaefiti. Atque femper erit $BN = BC + CN = x + \frac{cy}{a}$. & $QN$ femper $= BN - BQ = x + \frac{cy}{a} - \frac{2dd}{b}$. Item ob triangula fimilia $QHL$. $MCN$. propter angul. $QHL = DQH = AOB$ [uti dictum] $= MCN$. & angulum $QLH = BQL = ABD$ (quod etiam dictum) $= MNC$; habebitur $QH$ $QL$ :: $MC$. $MN$. nempe $a$. $m$ :: $y \cdot \frac{my}{a} = MN$. fed funt $QN$. abfciffae; & $NM$. ordinatae Loci conftructi hyperbolici. unde $QN \times NM$. eft femper $= QZ \times ZT$; five $\overline{\frac{cy}{a} + x - \frac{2dd}{b}} \times \frac{my}{a} = \frac{2mdd}{b}$. Ergo; fi fiat multiplicatio; & condatur confueta forma aequatio; erit $yy + \frac{ayx}{c} - \frac{2addy}{bc} - \frac{2aadd}{bc} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Igitur erit in defcripta hyperbole Locus quaefitus. atque fi ex quovis eius puncto $M$ ducantur lineae ad $B$. & $A$; quarum $MA$ fecat $BD$. in $E$; erit triangulum $BME$ femper datum; & $= dd$. Id enim pofitum eft. $Q. E. F.$

## PROPOSITIO II.

FIG. III. I. Sint quae antea. Et Hyperboles fit oppofita $SG$. Poterit Hyperboles oppofita perducta effe per punctum $A$. datae pofitione, & magnitudine rectae Lineae $AB$. poterit etiam tota procedere extra $AB$. & poterit quoque illam fecare. Dico primo; aut permeet curva per $A$. aut fecet $AB$. aut tota extra $AB$ ca-

dat; esse semper locum in eiusdem $SG$ curvae punctis $M$; cuius ordinatae $MC$ in loco quidem quaesito sunt $= -y$. Sed abscissae $BC$ manent $= +x$. scilicet esse semper locum in ipsa hyperbole opposita respiciente plagam ex $B$ versus $D$. positam.

Etenim sit punctum curvae quodvis $M$. in ea parte acceptum; unde ducantur; uti supra in loco quaesito; ordinata $MC$ curvae; atque normalis $MI$; item ducatur $AO$. in angulo $AOD$ obtuso; & perpendicularis $AF$. supra $BQD$ asyptotum. Erit angulus $BCM$ ordinatarum ea in plaga acutus; cum sint ordinatae parallelae (*construct.*) ipsi $AO$. Atque est quidem $BC = +x$. Sed $CM = -y$. Item si $M$ est punctum in curva quaesitum; iunctis $MB$. $MA$; secabit $MA$ datam positione $BD$ juxta problema in puncto $E$. non intus $BD$. qualis $MAe$. sed ad partem $BR$. oppositam ipsi $BD$. quod liquet; secaret enim tunc ita recta $MA$; si duci posset; rectam $BM$; seu latus $BM$; ut non constitueretur triangulum $BMAE$; quod vult problema. Debet igitur illud constitui hypothesi conditionis problematis. Nunc per ea, quae effecta sunt in praecedenti; erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Sed $EC$ est $= BC + EB = x + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - byx}{-by}$. atque $OE = BO + BE$ erit $= c + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - cby}{-by}$. Inde; uti supra; habebitur proportio $a . \frac{2add - cby}{-by} :: -y . \frac{2add - byx}{-by}$. Quare erit $-\frac{2addy + cbyy}{-by} = \frac{2aadd - abyx}{-by}$. atque $yy + \frac{ayx}{c} - \frac{2addy}{cb} - \frac{2aadd}{cb} = 0$. quae plane eadem aequatio est; quae supra inventa fuit.

Componetur autem Locus simili modo, quo in praecedenti. Nam sit acceptum quodvis punctum $M$ in hyperbola descripta opposita in plaga respiciente asymptotum $BD$, ubi $BC$ sunt $+x$.

Sed $CM$ ſunt $-y$. Et agatur $MC$ parallela $AO$. atque normalis $MI$. Et $MN$ parallela $AB$; ſeu aſymptoto $QVX$. Erit; uti in praecedenti; $CN = -\frac{cy}{a}$. atque $BN = BC - CN$ erit $= x + \frac{cy}{a}$. atque $QN$ abſciſſa loci conſtructi erit $= BQ - BN = \frac{2dd}{b} - x - \frac{cy}{a}$. Eſt vero $NM = -\frac{my}{a}$; ordinata loci conſtructi. Atqui eſt $QN \times NM = BZ \times ZT$. Quare habebitur $\overline{\frac{2dd}{b} - x - \frac{cy}{a}} \times -\frac{my}{a} = \frac{2mdd}{b}$. debet enim poteſtas $\frac{2mdd}{b}$ curvae praefigi ſigno $+$; non ſigno $-$; cum in eadem plaga compoſitus locus fuerit; ubi quaeſitus. Ergo manet locus quaeſitus; ubi determinatus eſt. Et junctis ibi $MB$. $MA$. quae ſecet $BD$ in $E$; erit triangulum $BME$. ſemper datum; & $= dd$.

II. Dico ſecundo; eſſe etiam locum in hyperbole reſpiciente plagam $BR$ aſymptoti. Vbi angulus Ordinatarum $BCM$ ſemper erit obtuſus; cum ſint ordinatae parallelae ipſi $AO$. (*conſtruction.*) atque abſciſſae, & ordinatae loci quaeſiti fient $-x$; & $-y$. Oportet autem, ut punctum $E$. tunc cadat ſupra $BR$. ad partes ſcilicet curvae $S$; non vero ad partes curvae $G$; ſupra $BD$. Id vero ſemper accidet, ſi hyperboles ipſa oppoſita pertranſeat per extremum punctum $A$ rectae datae $AB$; aut ſecet ipſam $AB$. poteſt enim & per $A$. perduci; & ſecare rectam $AB$; & tota etiam extra illam prolabi; ut initio num. I. dicebatur.

FIG. IV. & V. TAB. III.

Demonſtratur. Pertranſeat curva per $A$ extremum punctum rectae $AB$. aut ſecet illam uti in $P$. Agatur ex $A$ normalis $AF$ ſupra $BD$; veluti ſupra in ſolutione, & compoſitione problematis quoque efficiebatur. Et ſi curva ſecat $AB$; profecto; cum ſit tunc punctum $A$ extra curvam; ſecabit normalis $AF$ ipſam eandem curvam in $K$. Nunc ſunt $AF$. aut $KF$ diſtantiae curvae ab aſym-

FIG. V.

FIG. IV. & V.

ptoto

ptoto $RQD$ in locis $A$. aut $K$. Et accepto puncto quovis $M$. in curva; atque ducta ex $M$ normali $MI$ supra $RQD$; uti etiam fiebat in solutione, & constructione Loci; erit $MI$ distantia curvae ab eodem asymptoto $RQD$ in puncto quovis $M$. atqui per proprietatem curvae asymptoticae est distantia $MI$. semper minor distantia $AF$. & minor distantia $KF$; unde; & secundo casu multo magis; minor quàm normalis tota $AF$. Ergo per Element. Geometriae recta linea $AME$ non parallela asymptoto $RQD$. occurret illi in $E$. ad partes rectae $MI$ minoris quàm $AF$. & inde semper accidet; si hyperboles opposita pertranseat per extremum punctum $A$. datae rectae $AB$; aut si secet $AB$; ut punctum $E$. cadat semper supra $BR$. ad partes curvae $S$. non vero supra $BD$. ad partes curvae $G$. Et posita conditio loci, quô cadet punctum $E$. his casibus semper servabitur $Q.E.D.$

FIG. IV. & V.

Nunc. Sit punctum quodvis $M$ in hyperbole opposita $GS$. respiciente plagam $BR$ asymptoti. Vbi abscissae fiunt $-x$; itemque ordinatim positae sunt $-y$. Ex $M$. ducantur; ut supra in loco quaesito; $MC$. ordinata Curvae, atque normalis $MI$; item ducatur $AO$. in angulo $AQD$. obtuso. & perpendicularis $AF$. supra $RQD$ asymptotum: eritque angulus ordinatarum $BCM$. obtusus; cum sint ordinatae parallelae ipsi $AO$ ( *Construction.*)

FIG IV. & V.

Itaque si praestentur; quae in loco quaesito effecta sunt in propositione I. erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Inde $EC = EB - BC$ erit $= \frac{2add}{-by} + x = \frac{2add - byx}{-by}$. atque $OE$ erit $= OB + BE = c + \frac{2add}{-by} = \frac{2add - cby}{-by}$. Ergo analogia erit $a . \frac{2add - cby}{-by} :: -y . \frac{2add - byx}{-by}$. quare habebitur $2aadd - abyx = -2addy + cbyy$. Atque $yy - \frac{2addy}{cb} + \frac{ayx}{c} - \frac{2aadd}{cb} = 0$. quae aequatio est plane

ipsa

ipsa eadem cum supra inventa (*proposit. I. & num.* 1. *huius*). Itaque eodem omnino modo construetur, ac illa tum in propositione I. tum in hac secunda n. I. Igitur etiam in ea hyperbole opposita $GS$. Limes erit ordinationum quaesitus.

## PROPOSITIO III.

FIG. VI. & VII. Sint omnia; quae antea. Sed cadat hyperboles opposita $GS$. tota extra datam rectam $AB$. Iam vero pertractati duo casus sunt; quibus hyperboles haec opposita aut pervadit per $A$ punctum extremum ipsius $AB$; aut secat $AB$; tumq; ostensum est, FIG. IV. & V. semper esse illam locum quaesitum; cadereque necessario intersectionem $E$. rectae $MAE$. & asymptoti $RQD$ supra $BR$. ad partes FIG. VI. & VII. curvae $S$. contra plagam $QD$. Ad hanc vero partem; sed & ad aliam aversam; nempe ad partem curvae $G$. versùs $QD$. incidere quoque posset hoc casu curvae percurrentis extra totam datam rectam $AB$. intersectio eadem $E$. si Locus quaesitus diceretur esse posse opposita hyperboles $GS$. cum hoc casu non habeant locum, quae in praecedenti propositione n. II. dicta sunt ostendentia intersectionem $E$. necessario cadere supra asymptotum $BD$. ad partes FIG. VII. & VIII. $S$. curvae; & non posse incidere ad partes $G$ versus $QD$. Itaq; incidat intersectio $E$. ad partes curvae $G$. versùs $QD$. Et cadat aut extra $BO$. aut intra $BO$. semper enim constituetur triangulum $BEM$; FIG. VII. quod vult problema. Non erit $GS$. locus quaesitus. Cadat enim intersectio $E$. extra $BO$. Et hyperboles $GS$. esse possit is locus. Fiant quae supra. Erunt abscissae loci quaesiti ipsae $BC = -x$ atq; ordinatae $CM = -y$. Erit etiam angulus ordinatarum $BCM$. obtusus; cum sint ordinatae parallelae ipsi $AO$. Igitur erit $MI = -\frac{by}{a}$. Et $EB = \frac{2add}{-by}$. Sed $EC = EB + BC$ erit $= \frac{2add}{-by} - x = \frac{2add + byx.}{-by}$ atque $OE = EB - BO$ erit $= \frac{2add}{-by} - c = \frac{2add + cby}{-by}$. Hinc erit $a. \frac{2add + cby}{-by} :: -y. \frac{2add + bxy}{-by}$.

Et

Et $-2addy - cbby = 2aadd + abyx$. atq; $yy + \frac{2addy}{cb}$ $+ \frac{ayx}{c} + \frac{2aadd}{cb} = 0$. Quae non eſt aequatio ſupra inventa. Et ſi pro $EB = \frac{2add}{-by}$ accipiatur illi aequalis $- \frac{2add}{+by}$ [*per algorithmum*. Etenim eſt $+ \frac{2add}{-by} = \frac{-1 \times -2add}{-1 \times +by}$ $= \frac{-2add}{+by}$; ] & efficiantur eadem; evadet aequatio $yy + \frac{2addy}{cb} + \frac{ayx}{c} + \frac{2aadd}{cb} = 0$. uti prius; & quae nequaquam eſt aequatio ſupra in loco quaeſito (*propoſ. I.*) comperta.

Cadat hoc eodem caſu interſectionis $MAE$. cum aſymptoto $RQD$. ad partem curvae $G$. verſus $QD$; dum curva tota procedit extra rectam $AB$ (*Fig.* VIII.); punctum $E$ interſectionis intra $BO$; ſi hyperboles oppoſita $GS$. dicatur eſſe poſſe locus quaeſitus. Et fiant quae in ſuperioribus. Sed tunc $MC$. ordinata loci quaeſiti cadet neceſſario extra $BO$. ſupra $RQD$. ad partes $D$; non ad partes $R$. uti antea (*Fig.* VII.). Eſt enim parallela ipſi $AO$. Inde $BC$. abſciſſa loci quaeſiti [*Fig.* VIII.] erit $+x$. manet quidem $CM$. ordinata $= -y$. Et ordinatarum angulus $BCM$. erit acutus. Itaque erit $EC = BC - BE = +x - \frac{2add}{-by} = - \frac{2byx - 2add.}{-by}$

Sed $OE$ erit $= BO - BE = c - \frac{2add}{-by} = - \frac{cby - 2aad.}{-by}$

Et analogia habebitur $a. - \frac{cby - 2add}{-by} :: -y. -2byx$ $-2add$. Quare erit $-2abyx - 2aadd = +cbyy + 2addy$. Hinc aequatio enaſcetur $yy + \frac{2addy}{cb} + \frac{2ayx}{c} + \frac{2aadd}{cb} = 0$. Vti hic ſupra; & quae aequatio non ea eſt; quam ſupra in loco quaeſito [*propoſ. I.*) adſequebamur. atque nequaquam illa proveniet; ſi; uti nuper; pro $EB = \frac{2add}{-by}$ ſumatur

tur $-\frac{2add}{-+by}$ [*per algorithm.*]. Quoniam; ſi efficiantur eadem; exorietur aequatio, quae prius; & quae hic ſupra; nimirum $yy + \frac{2addy}{cb} + \frac{ayx}{c} + \frac{2aadd}{cb} = 0$. non equidem ſupra in hoc ipſo eodem loco inveſtigando (*propoſit. I.*) deprehenſa. Ergo ſi locus quaeſitus diceretur eſſe oppoſita hyperboles *GS*. & interſectio *E* rectae lineae *EMA*. & aſymptoti *RQD* (*Fig.* VII. *&* VIII.) caderet ad plagam curvae *G*. verſus *QD*. aut extra, aut intra *BO*. nequaquam eſſe poſſet hyperboles oppoſita *GS*. locus ipſe quaeſitus; caſu; quo tota extra rectam *AB*. progrederetur.

Cadat tertio; ſi eadem hyperboles pervadens tota extra datam rectam *AB*. dicatur eſſe locus quaeſitus; interſectio *E*. rectae *EMA*. & aſymptoti *RQD*. ſupra *BR*. non ad partes curvae *G*. verſus *QD*. ſed ad partes curvae *S*. contra *QD*. ſicuti hic ſuperiùs praedicebatur. Et caſus eſſet Figurae VI. Igitur accipiatur punctum quodvis *M*. in curva (*Fig.* VI.). Coniungantur *MB*. & *MA*. quae *MA*. protracta ſecet in *E*. aſymptotum *BR*. ad dictam plagam *S*. At; cum punctum datum *A*. maneat [*hypoth.*] inter convexam curvam *GS*. & aſymptotum; ipſa recta *EMA*. ſecabit curvam *GS*. in alio puncto *K*. verſus eandem partem *BR*. aſymptoti. ſecus eſſet curvae tangens contra poſitionem. Quadere iungatur *KB*. Profecto cum in curva dicatur eſſe poſſe locus quaeſitus; & ſint puncta curvae *M*. atque *K*; erunt triangula *EMB*. *EKB*. aequalia. Inſigne abſurdum. Etenim eſſet baſis *EB*. utriuſque trianguli communis. Sed altitudines *MI*. & *KI*. nempe rectae ex *M*. & *K*. demiſſae ad normam ſupra aſymptotum *QR*. in *I*; forent ob aſymptoticam curvam neceſſario inaequales. Itaque nequiret eſſe hyperboles oppoſita *GS*. traiecta extra datam *AB*. locus quaeſitus; ſi dicta interſectio *E*. inſideret ad partes curvae *S*. contra *QD*. Ergo; ſi ſectio oppoſita *GS*. loci hyperbolici ad aſymptotos inventi (*propoſ. I.*) cadat tota extra datam rectam *AB*. nuſquam habebit locum quaeſitum. *Q. E. D.*

S c h o-

## SCHOLIUM.

In casu propositionis secundae num I. recta linea $MAE$ determinata quemadmodum saepe dictum est; potest secare sectionem oppositam in uno puncto; & potest in duobus. In casu eiusdem propositionis num. II. si curva opposita pervadit per extremum punctum $A$ datae rectae $AB$; ipsa $EMA$. minime secabit eandem curvam in alio puncto praeter $M$; secaret enim in tribus punctis curvam unam hyperbolicam recta linea; quod fieri nequit per Conicorum disciplinam. Si vero ipso eodem casu num. II. curva opposita secat eandem $AB$; uti in $P$; potest etiam & in alio secundo puncto recta linea $EMA$ secare curvam praeter punctum $M$. Igitur in casu (*Prop. II. num. I. Fig. III. & num. II. Fig. V.*) potest recta $EMA$ secare curvam oppositam in duobus punctis; & non in duobus; sed in uno secabit.

FIG. III. quae ibi. FIG. IV. FIG V.

In casu Propos. III. si intersectio $E$ caderet ad partes $S$. curvae contra asymptotum $QD$; secaretur curva necessario in duobus punctis $M$. & $K$. à recta $EAM$; uti ibi ostensum est. Sed sequeretur absurdum demonstratum in proposit. Qua de caussa non est Locus eo casu in hyperbola opposita $GS$. Atq; si eadem intersectio $E$ cadat ad partes curvae $G$ versus $QD$. nuspiam erit locus in sectione. quod etiam ibidem demonstratur; sive $E$ incidat intra $BO$. sive extra. Quo utroq; modo recta $EAM$. nequit nisi in unico puncto $M$. curvam asymptoticam secare; cum anguli $MEB$. vertex sit $E$. supra asymptotum. Inde eius duo latera $EAM$; & $EB$. semper subinde fient divergentia. quare $EAM$. numquam potest alibi occurrere curvae asymptoticae identidem ad asymptotum semper eandem $BE$ accedenti. Id vero in aliis casibus propos. II. Fig. III. IV. V. non consistit.

FIG. VI. FIG. VII. & VIII.

Ergo in sectione opposita erit semper locus quaesitus, si pertransit illa per extremum punctum $A$. datae rectae $AB$. (*propositione II. num. II. Fig. IV.*) Et nuspiam erit locus; si curva cadat tota extra $AB$; atque abscissae sint $-x$. & ordinatae $-y$; in loco quidem quaesito. (*Proposit. III. Fig. V. & VI.*) Si denique

 curva

curva ipsa opposita cadat tora extra $AB$; & non secet rectam $AB$; Sed abscissae loci quaesiti sint $+x$. & ordinatae $-y$ (*Proposit. II. num. I. Fig. III.*) aut secet ipsam $AB$. (*Proposit. II. num. II. Fig. V.*) tunc erit semper opposita sectio hyperbolica limes ordinationum quaesitus. Haec enim ex praecedentibus consectantur. Et quidem his duobus postremis casibus; cum non demonstretur recta $EMA$ necessario secare curvam oppositam in duobus punctis; potest enim, & non potest sic illam secare; uti initio scholii dictum est; & cum loei quaesiti aequatio bene proveniat; non secabit ipsa $EMA$ curvam illam in duobus punctis: & locus sane erit in curva (*proposit. II. num. I. Fig. III. & num. II. Fig. V.*)

## PROPOSITIO IV.

Sint omnia quae antea. Sed datus angulus $ABD$ sit rectus (*Fig. I. Proposit. I*) & idem quaeratur. datus enim ibi fuit acutus. Eadem omni ex parte erit solutio; & constructio. Etenim solum fiet $AF = AB$. Hinc $AB$ erit $= b$. Et in constructione asymptotus $QLX$ erit ad normam supra $BD$. in $Q$. Et cadet etiam intra angulum $BQK$ obtusum. Et reliqua uti in Propositione prima.

FIG. IX. Sit idem angulus $ABD$ datus obtusus. Conficietur quoque eodem modo problema. Et datus angulus ordinatarum $MCB$ erit quoque obtusus. Et perpendiculum $AF$. cadet extra $AB$. atque $AO$ parallela ducta ordinatis supra $BD$. incidet supra $BD$. ad partes $D$. Sicuti in praecedentibus. Et $EC$ erit pariter $=$ $BC - BE$. atque $OE = BE - BO$. uti in loco quaesito. (*proposit. I.*) Et reliqua omnia eodem modo sicuti antea perficientur.

# PROBLEMA V. GEOMETRICVM.

PROBL. V.

## PROPOSITIO I.

*TAB IV.* FIG. I. Sit datum positione, & magnitudine triangulum $BAQ$. rectangulum in $B$. Quaeritur trames punctorum $M$, ita ut ductis ex

ex punctis $M$. lineis rectis $MN$ parallelis $BQ$. & occurrentibus in $N$. ipsi $BA$ protractae hinc, & hinc. si iungantur $MA$. & $NQ$. fiant aequales. Sit $ABQ$. datum triangulum non Isosceles. Itemque sit $AB$ latus minus latere $BQ$.

Ponatur inventus Limes $DEI$. cuius punctum quodvis sit $M$. manens in locis positis superne ipsi datae $BQ$. Ex $M$. ducta $MN$ aequidistans $BQ$ secet $BA$ in $N$. Connectantur $MA$. & $NQ$. Sint datae $AB = a$. & $BQ = b$. atque abscissae loci quaesiti $AN$ ex $A$ tendentes versus $B$. sint $+ x$. Et ordinatae ibi positae $NM$ in plaga aversa ipsi $BQ$. sint $+ y$. Erit $BN = AN - AB = x - a$. atqui est $MA^2 = yy + xx$. atque $NQ^2 = bb + xx - 2ax + aa$. & $MA$. (*hypothesi*) est $= NQ$. Ergo erit $yy + xx = bb + xx - 2ax + aa$. Et $yy + 2ax - bb - aa = 0$. Construetur autem Locus sic.

FIG. EADEM

Sumatur in $AB$. versus $B$. Linea $AD = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$. Erit $AD$. recta maior $AB$. Quod ostenditur. Nam est $\frac{bb}{a}$ tertia Geometrica post $a$.& $b$. quae sit recta linea $L$. Inde erit $AB . BQ :: BQ . L$. Quare (*hypothesi*) erit $L$. maior $BQ$. Et longe magis maior quàm $AB$. Hinc $\frac{L}{2}$ maior $\frac{AB}{2}$. & $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$; scilicet $\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$ maior erit $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2}$. nempe $a$. Quare $AD$. recta definita maior erit $AB$. Inde punctum $D$. cadet extra $AB$. versus $B$. Nunc axi $DBA$. vertice $D$. parametro $DL = 2a$. describatur Parabola $IEDF$. Erit ea semita punctorum $M$. quaesita.

FIG. EADEM

Quoniam ordinatim ponatur ex $DBA$. quaevis $NM$ ad parabolam in crure $DE$. superius ad $BQ$. Et sunt $AN = x$. abscissae loci quaesiti. Sed loci constructi sunt abscissae $DN = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Eaedem vero $NM = y$. ordinatae utriusque sunt Loci. Sed ob parabolam habetur $MN^2 = DN \times DL$. Igi-

tur erit $yy = \overline{\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x} \times 2a$. Itaque erit $yy = bb + aa - 2ax$. Et $yy + 2ax - aa - bb = 0$. Qui locus fuit inventus. Quare iunctae semper $MA$. & $NQ$. erunt aequales. Id enim positum est. $Q$. $E$. $F$.

## PROPOSITIO II.

EADEM FIG. Sint omnia quae antea. non permeabit Parabolae crus $DF$. per $Q$. verticem dati trianguli. Esset enim per locum Geometricum recta $BQ = AQ$. Quod valde absonum rationi. Itemque si ordinaretur ad curvam tota $QBO$; tunc $AO$ foret $= AQ$. Ergo foret $= BQ$. Et inde $= BO$. Quae omni modo cum eadem ratione pugnant. Et quidem; si ad curvam ordinata foret ipsa $QBO$. fieret $BQ^2 = DB \times DL$. Quare esset $bb = \overline{\frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - a} \times 2a$. Est enim $DB = AD - AB$. Igitur esset $bb = bb + aa - 2aa$. quod à ratione prorsus abhorret.

Est vero Locus in crure ipso $DF$. Nam sumatur quodvis punctum $M$. in illo superiùs ad datam $BQO$. & ordinatim ponatur $MN$; erit $AN = +x$. Et $MN = -y$. Inde $MN^2$ erit $= +yy$. Et reliqua uti antea. Eritque etiam ibi $NQ = MA$. Itemque si sumatur ibidem tota ordinata $MNM$. erit $MA$. in crure $DE = NQ$. Sed $MA$ cruris $DE$ est $= MA$ cruris $DF$. Ergo in crure $DF$ est etiam $MA = NQ$.

Accipiatur nunc plaga infra $BQO$. Vbi abscissae efficiuntur $= -x$. Et ordinatae in parte versus parabolae crus $DE$ sunt $+y$; sed in loco versus parabolae crus $DF$. sunt $-y$. Itaque sit ibi abscissa $AP$; & ordinata $PK$ versus $DF$. Et erit parabolae abscissa $DP = DA + AP = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Et ordinata $PK$ erit $= -y$. Igitur eadem prodibit ibi aequatio. Et

sit

ſit ibidem abſciſſa $AH$. Et ordinata $HM$. verſus $DE$. Et erit parabolae abſciſſa $DH = DA + AH = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2} - x$. Et ordinata $HM$. erit $= + y$. Et eandem etiam inveniemus aequationem. Inde erunt iunctae $PQ$. & $AK$. atque $HQ$. & $AM$ inter ſe aequales.

Tandem Locus in Curvae portione $TR$. intercepta inter duo trianguli latera $BQ$, $AQ$, inſidit etiam hinc, & inde ad curvam. Quoniam erit ibi abſciſſa $BN = AB - AN = a - x$ & ordinata $NM = \mp y$. Inde efficiantur omnia; quae antea: eritque ibi $MA = NQ$. Ergo ſane ubique in deſcripta parabola adeſt quaeſita ſedes ordinationum $MN$.

## PROPOSITIO III.

Sint omnia qua antea. Sed datum triangulum $BAQ$. Sit Iſoſceles. Et erit idem locus parabolicus; qui quaeritur. Sint enim quae prius. Itaque erit $AB = BQ$. Inde $a = b$. Et $AD = \frac{bb}{2a} + \frac{a}{2}$, fiet $= a$. Igitur erit $AD = AB$. Et $B$. efficietur vertex parabolae in loco conſtructo; cum iam provenerit locus quaeſitus $yy + 2ax - 2aa = 0$. Idem vero axis $BA$. erit Parabolae; & idem latus rectum $2a$. Igitur ſit ordinata $MN$. & abſciſſa $BN$. Erit illa quidem $= \mp y$. haec vero aequalis ſemper erit $a - x$. Sed eſt $MN^2 = BN \times 2a$. Quare erit $yy = 2aa - 2ax$. Et $yy + 2ax - 2aa = 0$. Et ubique veſtigia $M$. in utroque parabolae crure $BE$. & $BF$. invenientur tam ſupra, quàm infra punctum $A$. quare ubique erit $MA$ aequalis $NQ$.

FIG. I. & II.

ALI-

## ALITER OMNIA SYNTHETICE.

### LEMMA.

I. Sit data recta linea $AD$. magnitudine; cuius data pars $AB$. divisa sit bifariam in $C$. Addatur ipsi $AD$ in directum recta $DO$ aequalis $BD$. Erit $AO$; scilicet dupla $BD$; una cum $AB$. aequalis $2\,CD$. Nam est $AO = AB + BO = 2CB + 2BD = 2CD$. Item erit $2\,DA - BA = 2CD$. Nam est $DA - CD = AC = \frac{BA.}{2}$

FIG. III.

Ergo erit $2DA - 2CD = BA$. Et $2DA - BA = 2CD$.

II. Sit recta $AB$, & recta $BQ$. atque sit $K$ tertia Geometrica post duplam $AB$. & post $BQ$. perspicuum est; esse duplam $K$ tertiam Geometricam post simplicem $AB$. & post $BQ$.

EADEM FIG.

### PROPOSITIO IV.

FIG. I. Modo sint, quae antea, dividatur $BA$ bifariam in $C$. Et descripta sit parabola $EDF$. vertice; axi; parametro; quemadmodum in superioribus constitutum est. dico illum esse locum quaesitum. demonstratur. Est recta $DL$. parameter.

Nam sumatur semiordinata Parabolae quaevis $NM$. ex $A$. versus verticem $D$. Erit per parabolam $MN^2 = DN \times DL$. Inde $AM^2 = AN^2 + MN^2$ erit $= AN^2 + DN \times DL$. Sive $AM^2 = DN \times DL + AB^2 + 2AB \times BN + BN^2$ (4. 2. *Elem.*) atqui est $DL = 2AB$. [*per fabricam*] Quare erit $AM^2 = 2AB \times DN + 2AB \times BN + AB^2 + BN^2$. Sive $AM^2 = 2AB \times DB + AB^2 + BN^2$. [1. 2. *Elem.*] Scilicet $AM^2$ erit $= 2DB \times AB + AB^2 + BN^2$. Sumatur tamquam una recta linea $2DB + AB$. atque altera sit recta $AB$. Igitur erit $2DB \times AB + AB^2$ rectangulum ex recta $2DB + AB$ in rectam alteram $AB$ (*per eandem*). Et inde $AM^2$ erit $=$ rectangulo; quod ex $2DB + AB$. conficitur in $AB$; una cum $BN^2$.

Erat

Erat ( *conſtructione* ) tota $AD$ aequalis ipſi $AC$. ſimul cum tertia in proportione Geometrica poſt $2AB$. & $BQ$. Sed $AD$. componitur ex $AC$. & $CD$. Ergo erit $AC + CD$ aequalis ipſi $AC$. cum dicta tertia Geometrica; Et; ſublata communi $AC$; erit ſola $CD$ aequalis eidem tertiae. Et dupla $CD$. aequalis tertiae Geometricae poſt $AB$. & $BQ$. [ *Lemm. n.* 2.] atqui dupla $DB$ ſimul cum $AB$. eſt aequalis duplae $CD$ ( *Lemm. n.* 1. ). Ergo dupla $DB$ ſimul cum $AB$. erit tertia illa poſt $AB$. & $BQ$. Et $BQ^2$ erit aequale rectangulo; quod ex dupla $DB$. ſimul cum $AB$. tamquam ex una recta linea conſtituitur in ipſam $AB$. ( 16. VI. *Elem.* ) atqui hoc rectangulum una cum $BN^2$. erat aequale quadrato quod ex $AM$. Igitur erit $AM^2 = BQ^2 + BN^2$. Sed etiam eſt $NQ^2 = BQ^2 + BN^2$. Ergo erit $AM^2 = NQ^2$. Et $AM = NQ$. Q. E. D.

Accipiatur nunc ſemiordinata parabolae quaevis $HM$. ex $A$. in plaga averſa vertici $D$. Et fiant. quae antea. atque erit $AM^2 = MH^2 + AH^2 = DH \times DL + BH^2 - BA^2 - 2BA \times AH$. ( *per parabol.* & 4. 2. *Elem.* ) Sed eſt $DL =$ [ *conſtruction.* ] $2BA$. quare erit $AM^2 = 2AB \times DH - 2AB \times AH + BH^2 - BA^2 = 2AB \times DA + BH^2 - BA^2$. Etenim eſt $AB \times DH = AB \times DA + AB \times AH$ ( 1. 2. *Elem.* ) ſive $2AB \times DH = 2AB\ DA + 2AB \times AH$. Inde erit $2AB \times DH - 2AB \times AH = 2AB \times DA$. Ergo fiet $AM^2 = 2AB \times DA + BH^2 - BA^2$. Et conſtituatur una recta linea $2DA - BA$. [ erit autem ſemper ( *hypotheſi* ) $2DA$ maior quàm $BA$ ] Ergo $2DA \times AB - BA^2$. erit rectangulum; quod ex recta linea $2DA - BA$ in $BA$ efficitur ( *per eandem* ) ; cui ſimul cum $BH^2$ erit aequale $AM^2$. Et ſicuti antea oſtendetur $2CD$ tertia Geometrica poſt $AB$; & $BQ$. atqui $2DA - BA$ eſt $= 2CD$ [ *Lemm n.* 1. ] Igitur erit $AB$ tertia Geometriea poſt $BQ$; & $2DA - BA$. Quare $BQ^2$ = rectangulo quod ex recta linea conſtituta $2DA - BA$ efficitur in $BA$. ( 16. VI. *Elem.* ); cui una cum quadrato $BH^2$ erit $= AM^2$. Ergo $AM^2$ erit $= BQ^2 + BH^2$. Sed etiam $HQ^2$ eſt $= BQ^2 + BH^2$. Inde $AM^2 = HQ^2$. Et $AM = HQ$. Q. E. D.

EADEM FIG.

## PROPOSITIO V.

FIG. II. **S**Int omnia. quae antea. Si datum triangulum fuerit $ABQ$ isosceles; facilis est synthetica problematis solutio. Nam; veluti casu eodem effectum est in proposit. III. (*Fig.^is quae ibi*); describatur Parabola eadem; sed vertice $B$ communi cum trianguli $ABQ$ dati vertice: & erit ea Limes ordinationum quaesitus; plane idem ac in alio casu. Quoniam sumatur primum abscissa $BN$ in axi $BAG$. supra punctum $A$. Et inde ordinatim ad curvam ponatur $NM$; iunganturque $MA$. & $NQ$. Est quidem $MA^2 = MN^2 + NA^2 = BN \times 2BA + NA^2 =$ (7. 2. *Elem.*) $BA^2 + BN^2 = BQ^2 + BN^2$. Sed etiam $NQ^2$ est $= BN^2 + BQ^2$. Ergo erit $MA^2 = NQ^2$. & $MA = NQ$.

Accipiatur postea alia abscissa $BH$ infra $A$. unde sit ordinata ad parabolam posita $HM$. Et connectantur $HQ$; atque $MA$. Est sane $MA^2 = MH^2 + AH^2 = BH \times 2BA + AH^2$; scilicet $= 2BH \times BA + AH^2$; inde erit $MA^2 = BH^2 + BA^2$ [7. 2. *Elem*] $= BH^2 + BQ^2$. atqui etiam est $HQ^2 = BH^2 + BQ^2$. Igitur erit $MA^2 = HQ^2$. atq; $MA = HQ$. Q. E. D.

## PROPOSITIO VI.

FIG. IV. **N**Vnc in eodem triangulo dato $ABQ$. non aequicruri sit latus $AB$ maius quàm $BQ$. Et erit recta $AD$ minor $AB$. Quandoquidem sit recta linea $L$. supra definita (*proposit. I.*) Igitur erit $AB . BQ :: BQ . L$; atq; inde [*hypoth.*] recta $L$ minor $BQ$; Igitur erit $L$. longe magis minor, quàm $AB$. Et $\frac{L}{2}$ minor $\frac{AB}{2}$. atque $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$ minor $\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2}$; Ergo erit $\frac{L}{2} + \frac{AB}{2}$ minor $AB$; scilicet $AD$ (*ead. propos.*) minor $AB$. cadetque vertex $D$ curvae parabolicae intra latus $AB$, trianguli dati $ABQ$. Et reliqua hoc

hoc casu ipsius verticis $D$ intra $BA$ locati fient plane uti in antecedentibus; si triangulum non fuerit Equicrure; tùm in Analytica; cum in Synthetica solutione. Etenim pro solutione Synthetica; si semiordinata sumebatur quaevis $HM$ parabolae infa $A$; opus erat; ut $2DA$ foret recta maior quàm $BA$. (*Proposition. IV.*) atqui aut dati trianguli non Isosceles $ABQ$ latus $AB$ sit minus; aut sit maius latere $BQ$; erit semper recta $2DA$ maior quàm $AB$; quoniam; si dicatur quoque $L$ tertia praedicta proportionalis; erit (*construction. Proposit. I.*) semper $\frac{L}{2} + \frac{BA}{2} = DA$. unde erit semper $L + BA = 2DA$. Ergo $2DA$ erit maior semper recta linea quàm $BA$. excessu eiusdem tertiae proportionalis. Quare patet quod propositum est. Solutio autem analytica est eadem, quae supra [*Propositione I.*]

FIG. IV.

FIG. I.

## SCHOLIVM.

I. Ostenditur in his semper; si sumatur etiam radix falsa $-x$. progigni aequationem; quae construitur; & quae est ipsamet inventa. Ergo ostenditur, à radicibus etiam falsis praeberi valores ignotae $x$. & esse illas aequationis inventae etiam radices: & satisfacere quaestioni. Et ita semper in antecedentibus; & in insequentibus. Quod semel admonitum volumus.

II. Quaesivit Limitem hunc parabolicum insignis ad laudem Geometra V. Vivianius in Divinatione secunda Geometrica in Aristaeum seniorem Lib. 3. a propositione XIX. usq. ad XXII. de Locis Solidis. Quatuor igitur propositionibus rem absolvit. Quarum prima proponit problema; si datum rectangulum triangulum fuerit Isosceles; tres vero aliae spectant casum; si idem triangulum non fuerit Isosceles. Et duae illarum continent non brevia Lemmata; tertia autem; qua Problema solvitur; satis bene est longa. Iam vero solutio Analytica non adest. Et nostra Synthetica solutio ab illa Vivianii est plane diversa.

# PROBLEMA VI. ALGEBRICVM.

## PROPOSITIO VNICA.

THeorema praecipuum Algebricum eſt; in tot punctis curvam ab alia curva ſecari, & non pluribus; quot indicat numerus factus in multiplicatione mutua duorum exponentum ignotarum duarum maximarum; quae ignotae naturam curvae commonſtrant. Id theorema interſectioni duorum Circulorum minimè convenit; qui mutuo in pluribus quàm duobus punctis non ſecantur per Elem. Geometr.. Deberent vero in quatuor; cum Circulus curva ſit conica duarum dimenſionum. Eſt igitur Circulus à Theoremate ſecludendus. Attamen oportet & Algebrice quaerere in quot punctis Circulus Circulum ſecare poſſit; atque convenientiam Algebrae, & Geometriae manifeſtare. Quod facere aggredimur; cum à nemine hactenus confectum viderimus.

Linea primi ordinis eſt recta; & unius dimenſionis. Et Linea ſecundi ordinis; ſeu curva Primi Generis eſt curva conica; atque duarum dimenſiouum: & linea Tertii ordinis; ſeu curva Secundi Generis eſt trium dimenſionum: atque linea quarti ordinis, ſive Tertii Generis eſt quatuor dimenſionum: atque linea quinti ordinis; ſeu Quarti Generis habet quinque dimenſiones. Et ita deinceps. Etenim linea primi ordinis eſt recta. Et nomen generis tribuitur ſolis lineis curvis. Quae nota ordo doctrinae hìc poſtulavit enunciata.

Itaque cum conicae lineae ſint duarum dimenſionum; profecto curva conica non ſecabit aliam conicam in pluribus, quàm quatuor punctis. poteſt enim ſecare in minoribus. quod ſemper intelligendum eſt. Et curva ſecundi Generis non ſecabit aliam Generis etiam ſecundi in pluribus quàm novem punctis: atque non ſecabit curvam generis primi, ſeu conicam in pluribus, quàm ſex punctis. Atque curva una ſecundi Generis non interſecabitur cum altera Tertii in pluribus quàm 12. punctis. Et ita hoc ordine de reliquis. Demonſtratio Algebrica generalis pro omnibus curvis

eſſe

eſſe poteſt (ſed & aliae demonſtrationes prolatae ; & litteris traditae ſunt) quoniam ſi ex puncto unius interſectionis duarum curvarum ducatur ordinatim poſita in dato angulo ad aliam rectam ; ſive diametrum aliquam ; poſitione datam : quae recta ordinatim poſita habeat exponentem maximum curvae, atque naturam illius indicantem ; continebit ſane ipſa ordinata ; calculo algebrico inſtituto iuxta naturam duarum curvarum mutuo interſectarum ; dimenſiones numero pares dicto producto. Quod compertum ; perſpectumque eſt in conſtructionibus aequationum algebricarum ; quando problema eſt determinatum. In quibus conſtructionibus duae adſumuntur curvae ad ipſam conſtructionem. Oportet autem ; ut aequatio conſtructa radices omnes habeat reales aut veras, aut falſas ; & nullam fictitiam.

Excipiendus eſt Circulus. qui curva eſt primi Generis ; aut ſecundi Gradus ; attamen Circulus Circulum non ſecat in pluribus quàm duobus punctis. quod oſtenditur in Elementis Geometriae. Sed id ipſum Algebrica analyſis modo nuper expoſito per interſectionem duorum circulorum ; ex qua interſectione linea recta ducatur ad aliam poſitione datam in angulo recto ; & quae linea recta ordinatim poſita in conſtructione naturam exponit circuli ; plane, & recte commonſtrat,

PROBL. VI. FIG. I. & II.

Sint enim Circuli duo ſeſe mutuo interſecantes. Quorum centra $B$. & $O$. aut ambo manentia intus unum Circulum ; aut alterum intus unum Circulum : & alterum intra alium Circulum. Sintque interſectiones $N$. & $N$ ; unde agantur $NC$. ordinatim adſumptae in conſtrutione ad angulos rectos ſupra $BO$. quae $BO$ data centra coniungat. qui primus eſt caſus. Accipiuntur autem ductae $NC$. normaliter ſupra $BO$ ad demonſtrationem huius Theorematis ; quod nunc oſtendendum eſt.

Producatur $BO$. eo uſque ſecet Circulos in $D$. & $T$. atque in $E$. & $Q$. erit $DT$ diameter unius Circuli ; atque $EQ$. diameter alterius. Et coniungantur $NO$. & $NB$. dicantur radius $NO = a$. & radius $NB = b$. Item dicatur $BO = c$. Et or-

FIG. II. & I. dinatim posita $NC$ pro constructione sit $= x$. Erit $OC = BO - BC$; aut $= BO + BC$. Quare erit $OC = c \mp \sqrt{bb - xx}$. atqui est $NO^2 = NC^2 + OC^2$. quare erit $aa = xx + cc - 2c\sqrt{bb - xx} + bb - xx$; sive $= xx + cc + 2c\sqrt{bb - xx} + bb - xx$.

FIG. I. & II. Inde erit $aa - bb - cc = \mp 2c\sqrt{bb - xx}$. atque $a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc + 2bbcc = 4ccbb - 4ccxx$. atque $xx + \frac{a^4}{4cc} + \frac{b^4}{4cc} + \frac{c^2}{4} - \frac{aabb}{2cc} - \frac{aa}{2} + \frac{bb}{2} - bb = 0$. Quae aequatio est secundi gradus.

Secundus Casus. Sit modo linea positione data non quidem $BO$ iungens centra Circulorum; sed alia $HL$. ad quam ordinata in constructione referatur. Sitque haec ordinata in angulo pariter recto supra $HL$. quae $HL$ cadat vel intra duos Circulos; vel

FIG. I. & II. extra. Et vel hinc; vel inde ab ipsa $BOD$. dicaturque in constructione $NI = x$. Est quidem $NI$ recta ex puncto interfectionis $N$. ducta. & quae protracta secat eandem $BOD$ in $C$. & $HL$. in $I$. ad normam (*hypothesi*). Est sane $HL$. parallela $BOD$ accepta. Data est positione $HL$; & data etiam positione; itemq; magnitudine $BO$. Et denominationes rectarum sint quae antea. Sed $IC$ data sit $= d$. Erit $NC = NI + IC$; sive $= IC - NI$. Hinc $NC = x + d$; sive $= d - x$. Sed est $BC^2 = BN^2 - NC^2$. Vnde $BC = \sqrt{BN^2 - NC^2}$. Ergo erit $BC = \sqrt{bb - xx - 2dx - dd}$; sive $= \sqrt{bb - xx + 2dx - dd}$. Atque $CO = BO - BC$. sive $= BO + BC$; erit $= c \mp \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Atqui est $NO^2 = NC^2 + CO^2 = \overline{NI + IC}^2 + CO^2$, sive $= \overline{IC - NI}^2 + CO^2$. quare habebitur $aa = xx + 2dx + dd + cc \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - ad} + bb - xx \mp 2dx - dd$. Sive $aa = xx - 2dx + dd + cc \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} + bb - xx \mp 2dx - dd$.

Hinc erit aequatio vel prima $aa - 2dx - cc - bb \pm 2dx = \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} = 0$. sive secunda $aa + 2dx - cc - bb \pm 2dx = \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Igitur

vel

vel tam una, quàm altera aequatio erit $aa - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. vel etiam prima erit $aa - 4dx - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Et secunda erit $aa + 4dx - cc - bb = \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Iuxta terminum $\mp 2dx$; qui in prima aequatione fit $-2dx$. unde $+2dx$; & $-2dx$ manentes, ubi sunt; sese collidant: aut fit $+2dx$. quare translati quò $aa$. ipsi $+2dx$; & $+2dx$ faciant $-4dx$: aut qui in secunda aequatione fit $+2dx$. unde $-2dx$ & $+2dx$ manentes, ubi sunt; sese perdant: aut fit $-2dx$. Quare translati quò $aa$. ipsi $-2dx$; & $-2dx$ faciant $+4dx$. Sed aequatio est semper secundi gradus; quicumq; casus fuerint aut signorum $+$; aut signorum $-$. atque aut quantitas $16dd$ maior sit, vel minor quàm $4cc$; scilicet sit $4d$. maior vel minor $2c$. Quae comperta erunt; si quis calculo probarit.

III. Casus. Sit Linea positione data $SP$; ad quam ordinatae ex interfectione duorum Circulorum ductae referantur in constructione in angulo dato: quae $SP$ neque linea sit coniungens data centra Circulorum; neq; illi aequidistans: & cadat vel extra, vel intra ipsos Circulos. Ex puncto intersectionis $N$. Circulorum ordinatim ponatur $NC$; ad angulum profecto rectum supra $BOD$. Et secet $NC$ rectam $SP$ in $M$. data est positione $SP$. atque data positione; & magnitudine $BO$. datumque punctum $N$. Ergo data erit $MC$. positione; & magnitudine. ( 25. *libri datorum Euclid* ) dicaturque $MC = d$. Sit vero $NM$ in constructione $x$. Et reliquae lineae denominentur, uti supra. Erit $NC = x + d$; si $SP$ cadit intra Circulos; sive $= d - x$; si cadit extra; cum primo casu sit $NC = NM + MC$. atq; secundo sit $= MC - NM$. Sed $BC^2$ est $= BN^2 - NC^2$. Vnde $BC$ erit $= \sqrt{BN^2 - NC^2}$ $= \sqrt{bb - xx - 2dx - dd}$; sive $= \sqrt{bb - xx + 2dx - xx}$. atque est $CO = BO - BC$; sive $= BO + BC$. Igitur erit $CO = c \mp \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$. Atqui est $NO^2 = NC^2 + CO^2$ $= \overline{NM + MC}^2 + CO^2$; vel $= \overline{MC - MN}^2 + CO^2$. Itaque erit $aa = xx + 2dx + dd + cc \mp 2c \sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd}$

FIG. I. & II.

FIG. I. & II.

+

$+ bb - xx \mp 2dx - dd$; sive erit $aa = xx - 2dx + dd + cc \mp 2c\sqrt{bb - xx \mp 2dx - dd} + bb - xx \mp 2dx - dd$. quare ventum prorsus est ad casum secundum. Itaque reliqua sicuti ibi fiat. Et aequatio semper provenit duarum dimensionum; quodvis fuerit signum vel $+$; vel $-$. atque eodem modo aut $16dd$ maior quantitas sit, vel minor $4cc$; nempe $4d$ maior sit, vel minor $2c$. Et reliqua; uti in latu secundo dictum est. Ergo circulum non secari à Circulo in pluribus, quàm duobus punctis est Algebrice demonstratum. *Q. F. O.*

S c h o l i v m.

Linea etiam recta includitur theoremate illo algebrico; scilicet in tot punctis secari lineam a linea; quot indicat factum ex Exponentibus dimensionum illarum. Est enim linea recta, linea primi ordinis; & unius dimensionis, seu unius gradus: & secat aliam rectam in uno puncto; & secat curvam conicam in duobus; & lineam tertii ordinis; seu curvam secundi Generis in tribus punctis; & lineam ordinis quarti; seu curvam tertii Generis in quatuor punctis; & lineam secat ordinis infinitesimi in punctis infinitis.

Cognoscitur igitur per hoc theorema Syntheticae, & Algebricae Geometriae mira, & summa consensio. Ipsa enim eadem Algebrica Geometria; quae generale demonstrat problema; habet & demonstratum casum ex illo seclusum iuxta syntheticam Geometriam.

## PROBLEMA VII. GEOMETRICVM.

TAB. V. PROBL. VII. FIG. I.

P R O P O S I T I O I.

Sit data parabola $AG$. cuius vertex $A$. Axis $AH$. Parameter $AL$. Et sit datum extra parabolam punctum $C$, oportet ex $C$. normalem rectam lineam $CB$ ad curvae perimetrum demittere.

Po-

Ponatur esse $CB$ quaesitum perpendiculum. Sit ex $B$. tangens curvae $BT$. cui erit etiam ad normam recta $CB$; occurratque tangens axi curvae in $T$. Secet vero $CB$. ipsum axim in $Q$. Ex $C$. agatur $CD$ parallela ordinatis curvae supra datam positione $AH$; cui conveniat in $D$. Educatur etiam ex $B$. recta $BF$. parallela $AH$. occurrens $CD$. in $F$. Liquet cadere illam intus $CD$; cum sit angulus in $D$. rectus; & normalis $CB$. concurrat necessario in $Q$. cum axi, sive recta $DAH$.

Sint datae, cognitaeque rectae $CD = a$. $DA = b$. Parameter $AL$ curvae $= p$. Sed sit ignota $DF$; & denominata $x$. ordinatim ad curvam adplicetur $BN$. Erit $BN = DF = x$. atqui ab parabolam est $AN = \frac{xx}{p}$. Inde $DN = DA + AN$ erit $b + \frac{xx}{p} = \frac{bp + xx}{p}$. Sed ob normalem $CB$ ad parabolam, & ob axim $AH$; habetur semper $QN = \frac{p}{2}$. Estque $QN \cdot NB :: BF. FC$. Ergo erit $\frac{p}{2} . x :: \frac{bp + xx}{p} . FC = \frac{2bpx + 2x^3}{pp}$. atqui data recta $DC = a$ constat ex partibus $DF$; & $FC$. Igitur erit $a = x + \frac{2bpx + 2x^3}{pp}$. Hinc conformata aequatio erit tertii gradus secundo termino orbata $x^3 + bpx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$.

Construetur autem sic.

Sit data positione recta $FD$. axis descriptae parabolae $CFH$. FIG. II. & III. cuius vertex $F$. parameter $\sqrt{\frac{pp}{2}}$. deinde in $FD$. sumatur extra parabolam recta $FI = \frac{b}{p}\sqrt{\frac{pp}{2}}$. atque ex $I$. excitetur ad

nor-

normam $IP = \frac{a}{2}$. & centro $P$. intervallo $PO = \sqrt{\frac{bb}{2} + \frac{aa}{4}}$ defcribatur Circulus $OA$.

FIG. II. & III. Perduceiur Circulus per verticem $F$. Parabolae. Adiungatur enim recta $PF$ ex $P$. ad verticem $F$. Eft (*conftructione*) $PF^2 = PI^2 + IF^2$. Inde erit $PF^2 = \frac{aa}{4} + \frac{bb}{2} = PO^2$. Eft vero $PO$. Circuli radius. Ergo patet; quod propofitum eft.

Secabit circulus parabol. $FC$ in aliquo puncto $B$. Demonftratur. Quoniam non folum algorithmus demonftrat modos dignofcendi; an aequationes tertii gradus radices habeant impoffibiles, feu imaginarias; verùm etiam an habeant illae radices poffibiles, feu dictas reales; cum demonftret radices impoffibiles non fore nifi numero pari. Et primum quidem demonftratum etiam habet idem algorithmus pro aequationibus quarti gradus; non vero viciffim fecundum; cum non fint verae propofitiones converfae. Ergo (per illum) aequationes tertii gradus habent femper aliquam radicem poffibilem. Et quae termino fecundo deficiuntur, continent neceffario radicem unam poffibilem, & alias impoffibiles; fiquidem fecundus terminus; qualis eft in noftra; fit pofitivus; feu praefixus fingno +. Pertranfit vero Circulus per verticem $F$. Parabolae: quae interfectio nullam par eft radicem aequationis miniftrando. Ergo alia curvarum interfectio erit; atque praeterea non ulla.

Fiat haec interfectio in puncto $B$.

FIG. II. & III. Nunc ordinetur ad parabolam recta $BN$; atque ex $B$. ducatur $BM$. parallela $IFD$. fecans $PI$. in $M$. Iungaturque radius $PB$. Dico, $BN$. effe quaefitam ignotam $x$; unicamque radicem aequationis inventae. Nam fit $BN = x = IM$. Nunc eft $MB$, feu $IN$; vel $IF + FN = \frac{b}{p} \sqrt{\frac{pp}{2}} + \frac{+ xx}{\sqrt{\frac{pp}{2}}}$ [*conftructione*]. atque eft $MP$. five $IP - IM$; aut $IM - IP$
=

$= \frac{a}{2} - x$; vel $= x - \frac{a}{2}$ (*constructIon.*). Sed est $PB^2 = BM^2 + MP^2 = IN^2 + \overline{IP - IM}^2$ sive $= IN^2 + \overline{IM - IP}^2 = \overline{IF + NF}^2 + \overline{IP - IM}^2$; aut $= \overline{IF + FN}^2 + \overline{IM - IP}^2$. Quare erit $\frac{bb}{2} + \frac{aa}{4} = \frac{bb}{2} + \frac{2bxx}{p} + \frac{2x^4}{pp} + \frac{aa}{4} - ax + xx$. Igitur rite & recte instructa aequatio habetur $x^3 + pbx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Igitur abscindatur, in data $CD$. portio $FD$ aequalis determinatae $BN$. quae quidem (*hypothesi*) est $+ x$. Et ex $F$. sit $FB$, parallela $DAH$. secans curvam in $B$. Et iungatur $B$. cum dato puncto $C$. Erit $CB$. normalis quaesita ad parabolae perimetrum in $B$. aut ad tangentem in $B$. curvae. Id enim positum est. $Q.E.F.$

FIG. I.
FIG. II. & III.
FIG. I.

## PROPOSITIO II.

### CONSTRVCTIO ALIA.

Sint quae antea. Adsumatur novus locus parabolicus $by = xx$. Eritque $byx = x^3$. Succedat in sedem ipsius $x^3$. in aequatione inventa aequalitas illius $byx$. Et efficietur illa $byx + pbx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$.

Accipiatur in interminata recta $AB$. portio $AL$ extra $AB$. aequalis $p + \frac{pp}{2b}$. atque vertice $A$. axi $AB$. parametro $= b$. describatur parabola $AE$. deinde sit $LH$ ad normam in $L$. supra $LAB$. seu parallela ordinatis parabolae; atque in eadem $LAB$. fiat $LT = \frac{ap}{2b}$. Ex $T$. educatur $TR$. parallela $LH$; & aequalis parametro $p$. datae parabolae. Nunc asymptotis $LH$. $LB$. descripta sit per punctum $R$. hyperboles $CORD$. Liquet hy-

FIG. IV.

 per-

perbolem occurrere parabolae; & in singulari puncto $N$. habet enim illa asymptotum axim parabolae $AB$. ad quam adtingere semper enititur; & nusquam eam carpet. Ergo unam secat parabolae perimetrum $AE$. Idem pariter; uti supra; [ *proposit. I.* ] demonstratur per algorithmum. De casu agitur $AL$. sumptae extra $AB$.

Sit interfectionis punctum $N$. unde ordinetur ad parabolam recta $NP$. dico esse $NP$. quaesitam $x$. Nam sit $NP = x$. Et $AP$. est $= y$. Patet, descriptam parabolam esse inductum locum $by = xx$. atqui est (*construction.*) $LP = LA + AP = p + \frac{pp}{2b} + y$. Et per hyperbolem habetur $LT \times TR = LP \times PN$. quare erit $\frac{app}{2b} = px + \frac{ppx}{2b} + xy$. Inde erit $byx + \frac{ppx}{2} + pbx - \frac{app}{2} = o$. Qui locus erat hyperbolis asymptoticae. atqui $y$. & $x$. sunt eaedem rectae in utraque curva. Igitur sufficiatur in hac aequatione loco $byx$ eius aequalitas $x^3$ per parabolam comparata. Et erit $x^3 + \frac{ppx}{2} + pbx - \frac{app}{2} = o$. quae aequatio fuit inventa: & construenda erat. Inde $NP$. determinabit exoptatam $x$. quae pernosci debebat. Et reliqua haud secus ac in praecedenti propositione.

## PROPOSITIO III.

Sint omnia quae priùs. Et quaeratur, ut aequatio comperta construatur ope parabolae ipsiusmet datae.

Immissus novus parabolicus locus sit $py = xx$. erit $pyx = x^3$. Et; facta substitutione aequalitatis in comperta aequatione; erit $pyx + bpx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = o$. Sive $yx + bx + \frac{px}{2} - \frac{ap}{2} = o$. quae hyperbolea est ad asymptotos. Nunc in axi $AH$. pa-

parabolae initio datae $AG$. abrumpatur è vertice sumpta recta $AL$. sed extra axim $AH$ aequalis $b + \frac{p}{2}$. Hinc erit $AL$. maior quàm $AD$. in eadem plaga posita. Ex $L$. agatur $LK$ parallela ordinatis parabolae. Et in $LAH$. determinetur $LI = p$. atque ex $I$. sit $IR$ aequidistans $LK$. aequalisque $\frac{a}{2}$. describatur modo per $R$. hyperboles $ERM$. asymptotis $LK$. & $LH$. Cadet quidem $LI$ aut intra $AD$. aut extra; & supra axim $AH$. sed extra $LD$. versus $H$. cum sit $LD = \frac{p}{2}$. Agitur de casu $AL$. positae extra $AH$. FIG. V.

Secabit hyperboles descripta parabolam $AG$. & in unico puncto $B$. per supra dicta; scilicet tum per algorithmum; cùm per descriptionem. Etenim habet ea asymptotum axim $AH$. parabolae; ad quam semper enititur; & dilabitur. Itaque secet illa parabolam in $B$. Vnde ad eamdem parabolam ordinatim ponatur $BN$. Erit $BN$ exoptata occulta $x$. Nam sit $BN = x$. Est $AN = y$. Quamobrem erit $LN = y + b + \frac{p}{2}$ (*constructione.*). Est $AG$. parabola data (*per hypothes.*) atqui ob hyperbolem habetur $LN \times NB = LI \times IR$. Igitur erit $yx + bx + \frac{px}{2} = \frac{ap}{2}$. Quae hyperboles asymptotica erat. Et in utraque curva eadem recta est $x$. eademque $y$. Quare subeat in hac hyperbola in locum $yx$ aequalitas, quam praebet parabola $\frac{x^3}{p}$. Et adsequemur eam quae inventa fuit, & erat construenda, aequationem $x^3 + pbx + \frac{ppx}{2} - \frac{app}{2} = 0$. Coniungatur nunc datum punctum $C$. cum $B$. & erit coniuncta $CB$. normalis ad $AG$. perimetrum parabolae datae. quod exoptabatur.

Id enim positum est.

SCHOLIUM.

Si data parabola fuerit cum diametro non cum axi; uti in propositione enunciatur; eadem plane est solutio. Nam; data diametro; invenitur illico axis; eiusque latus rectum: & consideretur data parabola cum axi, illiusque latere recto: & eadem peragantur. atque quaesita normalis ex dato puncto supra parabolae perimetrum deducetur. Si vero $AH$. sit axis; & datum punctum sit supra axim; uti in $Q$. & oporteat ex $Q$. ducere normalem rectam lineam ad curvae perimetrum; satis bene liquet; aliud non esse efficiendum; quàm ut sumatur $QN$. versus apicem $A$ curvae aequalis dimidio lateri recto; atque ex $N$. ordinetur $NB$: iuncta enim $BQ$. erit quaesita. Verùm alii esse possunt casus; scilicet puncti dati intra parabolam; unde agenda sit ad parabolae perimetrum recta normalis; quos excutere prosequemur.

FIG. I.

## PROPOSITIO IV.

FIG. VI.

Sit datum punctum $C$. intra parabolam, Et idem quaeratur. profecto si datum punctum $C$ in axi $AH$ insederit; iam expositus casus fuit in Scholio praecedentis Propositionis. Sed sit datum supra diametro aliqua $IK$ parabolae. Sitque vertex huius diametri $I$. Et inveniatur; data diametro; axis $AH$. Cuius vertex; seu vertex parabolae sit $A$. Sed sit datum $C$. intra parabolam; non vero supra ulla diametro; sit tamen data diameter $RS$. Et inveniatur axis $AH$. aut tandem sit datum $C$. intra parabolam cum nulla diametro data. Et inveniatur diameter una $RS$. deinde inveniatur axis $AH$. Continentur in his igitur casus omnes puncti dati intra parabolam: & supra, aut non supra diametro; non vero supra axi; de quo dictum est; uti nuper meminimus; in Schol. Propos. praeced. Sit igitur parabolae axis $AH$.

Ponatur esse $CB$. intus $GAH$. quaesita normalis ad perimetrum

trum $ABG$. parabolae in $B$. Et adinveniatur semper latus rectum parabolae pertinens ad axim. Est sane datus vertex $A$. ipsius parabolae. Sit $BT$ tangens curvae in $B$. occurrens axi in $T$. Et producta $BC$. occurrat eidem axi in $Q$. ordinatimque adplicetur recta $BN$. ad axim: Per $C$ sit $CD$ parallela ordinatis parabolae ad axim; quem secet in $D$. Itemq; ducatur $BF$ parallela $AH$. occurrens $CD$ in $F$. occuretq; per factam hypoth. extra $CD$. Haud absimilis erit solutio, ac si punctum $C$. maneret extra parabolam.

Sint igitur omnia uti supra. Et eaedem quantitatum denominationes. Ergo erit $AN = \frac{xx}{p}$. & $NT = \frac{2xx}{p}$. Sed est $DT = DA + AT$. Quare erit $DT = b + \frac{xx}{p} = \frac{bp + xx}{p}$. Et $DN = DT - TN$ erit $= \frac{bp + xx}{p} - \frac{2xx}{p} = \frac{bp - xx}{p} = BF$, atqui est $QN. NB :: BF. FC$. Ergo erit $\frac{p}{2} . x ::$ $\frac{bp - xx}{p}$. $FC = \frac{2bpx - 2x^3}{pp}$. Inde $DC = FD - FC$. erit $= x - \frac{2pbx + 2x^3}{pp} = \frac{ppx - 2bpx + 2x^3}{pp}$; quae quantitas etiam est $a = DC$. ex illis duabus partibus constans ignotis, quare erit $app = ppx - 2bpx + 2x^3$. Et $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$.

FIG. VI.

Tertius huius aequationis terminus positivus esse potest; & negativus. Etenim $\frac{p}{2}$ maior esse potest; & minor quàm $b$. Siquidem fuerit ille positivus; eaedem tum omnino erunt inventae aequationis constructiones; quàm quae supra (*prop. II. & III.*) praebitae sunt. Vnde determinatum in parabola erit punctum $B$. cum quo si iungatur $C$. ubi vis datum; obtinebitur quaesita $BC$. Definietur vero $B$. in parabola; si ducta normali $CD$. ad $AH$. fiat

in

in illa aequalis determinatae, & cognitae x. per conſtructionem recta *FD*. & ex *F*. educatur parallela *FB* ipſi *AH*. Occurret enim *FB*. parabola in puncto illo *B*. (*propoſit. I.*)

## PROPOSITIO V.

Sint quae antea. Sed ſit $\frac{p}{2}$ maior quàm $b$. Et inde terminus tertius aequationis ſit negativus. Adſumatur $bp - \frac{pp}{2} = + mm$. inde erit $\frac{pp}{2} - bp = - mm$. Et fiet $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = o$. Et paretur conſtructio per Circulum, & parabolam.

FIG. VII. & VIII. Quare ſit $AI$ recta terminata $= \frac{3m}{4}$. Ex $I$. ad angulos rectos ſit $IP = \frac{app}{4mm}$. Et centro $P$ intervallo $PO = \sqrt{\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4}}$. deſcribatur Circulus $ALQ$, atque vertice $A$. axi $AIH$. parametroque $m$. deſcripta ſit parabola $DAK$. Primo ſecabit Circulus parabolam. Et ſecundo quae ex interſectionibus ductae rectae ordinatae ad parabolam proferent valores ignotae $x$. & radices aequationis.

Quoniam iungatur $PA$. Erit ſane $PA = \sqrt{\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4}}$. (*per fabricam*). Inde pertranſit Circulus per verticem $A$. parabolae. Sed $AI$ manet intra parabolam. Et radius $PIO$ Circuli ſecat $AI$. in $I$. cùm ſit multo maior quàm ipſa $PI$ [*conſtructione*]. Ergo Circulus neceſſariè, & parabola mutuo occurrent. Secantur autem curvae in punctis aut uno; aut tribus. Praebent enim earum interſectiones; uti demonſtrabitur; valorem ignotae $x$. Sed tres aut unum habet illa valores; non quidem neceſſariè tres. Quoniam; cum haec inventa aequatio tertii gradus careat ſecundo termino; non ſatis eſt (per non iam diu demonſtrata in algorithmo)

rithmo) ut radices habere ea possit omnes tres possibiles; si tertius praefixus sit signo —; qualis est in nostra aequatione; & si triente coëfficientis illius affecti signo plus, sumptique cubi sit maius quadratum semissis termini postremi; quinimmo contrarium exposcitur; ut scilicet dictus cubus sit maior dicto quadrato. Quare primo casu; si ea conditio invenitur scilicet illius cubi minoris illo quadrato; adest quidem radix una possibilis in aequatione tertii gradus; in qua [*per algorith.*] una certe semper est possibilis; sed & amplius ea radix possibilis Arithmetice exponi potest: atque secundo casu; si invenitur conditio contraria quidem alteri; uti dictum; possunt quidem omnes radices esse possibiles; scilicet tres; licet possint & non esse; quoniam minimè est vera propositio conversa. non enim adhuc omnes innotuerunt necessariae conditiones. Haec autem non distinxit Cartesius. Lib. 3. Geometr. ubi de radicibus agit aequationum tertii Gradus; quae Arithmetice possint; aut non possint exponi. Ergo in nostra aequatione; quia potest dictus cubus esse maior dicto quadrato; & contra: potest dictum quadratum esse maius dicto cubo; atque etiam; quia non sunt verae propositiones conversae; esse poterunt radices tum tres; cum una tantum possibilis. Et inde aut una, aut tres erunt curvarum intersectiones. Quod erat primum.

Sin intersectiones tres $B$. unde ordinentur ad parabolam rectae $BN$. atq; ad circulum rectae $BM$. dein iungantur $PB$. Erunt $BM = AI - AN$. aut $= AN - AI$. Et $PM = PI + BN$; seu $= BN - PI$. Sunt autem $BN = + x$ ex $B$ versus parabolam $AK$ tendentes; & $= -x$. ex $B$. versus parabolam $AP$. Quare erit (*construct.*) FIG. VII.

$BM = \frac{3m}{4} - \frac{xx}{m}$; aut $= \frac{xx}{m} - \frac{3m}{4}$. Et $PM$ erit $= \frac{app}{4mm} - x$; sive $= x - \frac{app}{4mm}$. Atqui est $BP^2 = BM^2 + MP^2$. Quare erit

$$\frac{9m^6 + aap^4}{16m^4} = \frac{9mm}{16} - \frac{3}{2}xx + \frac{x^4}{mm} + \frac{aap^4}{16m^4} - \frac{appx}{2mm}$$

+

$+ xx$. Inde erit $x^4 - \frac{3}{2} mmxx + mmxx - \frac{appx}{2} = 0$. Sive $x^3 - mmxx - \frac{app}{2} = 0$. Igitur habebitur $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$. Quae aequatio fuit inventa. Habet autem aequatio [ *per algorith.* ] radicem unam poſitivam; duas vero negativas; ſi tres ſint poſſibiles. Inde valores duo ignotae $x$; ſive radices duae aequationis inventae erunt duae $BN$. tendentes ex $B$ ad parab.$^{am}$ $AD$; & una vera erit $BN$. vergens ex $B$. ad parabolam $AK$. Et haec fuit $+ x$. illaeq; $- x$. Quod erat alterum.

FIG. VIII. II. Sit radix ſingularis poſſibilis inventae aequationis. Occurret parabola Circulo illum ſecans in unico $B$. puncto cruris $AD$. ex dictis. Inde enim ducta $BN$. contendit ad alterum crus $AK$. Et eſt $BN$. radix poſitiva $+ x$. Etenim quae poſſibilis eſt una aequationis radix eſſe debet poſitiva. Nam; ob defectum ſecundi termini ſumma duarum falſarum radicum (*per algorith.*) deſtruere debet tertiam poſitivam. Sunt enim in hac aequatione duae radices falſae; & una vera. Non autem ſumma illa neceſſario elidetur cum tertia radice; niſi haec habeat $+$; & falſae ſimul additae neceſſario praefigantur ſigno $-$; ſcilicet ſint ambae negativae. Quoniam duarum harum falſarum una maior eſſe poteſt altera. indeque ſi utraque non invenietur affecta ſigno $-$. non deſtruent illae additae ſimul radicem veram. Ergo patet quod proponitur, eſſe, quae poſſibilis eſt radix; neceſſario poſitivam.

FIG. VI. Modo ſi tres ſint radices poſſibiles; ſumantur in recta $CD$ ducta normali ad axim in $D$ per $C$ punctum aut datum intra parabolam, aut datum extra illam portio una $FD$. ex $C$. verſus parabolam $AP$ aequalis determinatae $BN + x$. (Fig VII.) Eo enim in loco accepta in propoſit. fuit ignota $BN$, ſeu $DF = + x$. (Fig. I.);

FIG. VI. & duae $FD$. in plaga averſa; nempe verſus parabolam $AG$. una aequalis uni $BN$. (Fig. VII) Et altera aequalis alii $BN$ duarum $BN$. quae tendunt verſus parabolam $AD$. ſuntque $- x$. Deinde ex $F$. agan-

agantur axi parallelae rectae *FB*. Secabunt *FB*. parabolam in quaesito puncto *B*. Erunt enim *CB*. normales perimetro curvae in *B*; seu ad tangentem ductam ex *B*. Id enim positum est. FIG. VI.

Vna sit possibilis radix aequationis. Sumatur *FD*. modo dicto ex *C* versus parabol.[m] *AP* aequalis $BN + x$. (*Fig.* VIII.) Et reliqua uti prius. FIG. VI.

SCHOLIVM.

Perducitur descriptus circulus per verticem *A*. parabolae; seu axis. quod demonstratum est. Sed nulla inde enasci potest aequationis radix per constructionem. Non alii sunt problematis casus, nisi qui his propositionibus continentur. Casus enim puncti dati *C*. in parabolae perimetro; unde ducenda sit normalis; non vere est huius problematis casus; cum ducenda tantum tunc sit ex *C*. tangens curvam; atq; supra tangentem ad *C*. educenda recta ad normam. FIG. VII, & VIII.

Si propositio quarta habet inventam aequationem cum omnibus radicibus possibilibus; absolvet ea sola, determinabitque casus omnes problematis; si nempe punctum datum sit aut intus curvam alicubi; aut extra illam [*prop. IV.*]. Iamdiu in conicis demonstratum est; si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit; a quibus ad axim ex utraque parte demittantur rectae perpendiculares; esse aut unam, aut summam demissarum ex una parte aequalem illis, quae demittuntur ex altera. sed inventa in huius problematis solutione aequatio caret secundo termino; unde falsae radices, & verae sese mutuo (*per algorith.*) expellunt: & rectae construitur illa per circulum, & parabolam sese secantes. Ergo algorithmi, & reliquae Geometriae colligitur inde convenientia. Si punctum *C* datum sit extra parabolam; cadet *F*. intus *CD*. Quod demonstratum est propos. I. Si datum sit intra; tunc *F*. cadet extra *CD*. Simili modo id demonstratur. Et dictum quoque fuit proposit. I. FIG. VI.

Dictum est in hac propos.[ne] & in prima, non esse veram de radice impossibili propos.[em] conversam, de qua illic agitur; sed et non sunt verae propos.[es] conversae de quacumq; radice impossibili: nimirum; si aequatio Algebrica quibusdam affecta sit conditionibus; demon-

ſtrabitur adeſſe in illa radiees impoſſibiles. at non per converſam propoſitionem; ſi illae eonditiones non inſint; radiees erunt neceſſariò poſſibiles, & reales in aequatione. Nam non adhuc omnes enumeratae erunt, & cognitae conditiones: atque aliae, quae latent, poterunt inveſtigari. Id aceidit aequationibus tertii gradus termino ſeeundo deſtitutis; & quatum tertius habet —. Quoniam ut radices in illis eſſe poſſint omnes reales; non ſanè diu eſt, quum abdita detecta eſt, & nova neeeſſaria eonditio; de qua dictum eſt in propoſitione V. initio pag. 55. Oſtendit algorithmus aequationes dimenſionum numeri impatis habere neeeſſario radicem aliquam realem; uti de aequationibus tertii gradus dictum eſt in propoſitione I. pag 48. ſed alia haec res eſt, & plane diverſa.

## PROPOSITIO VI.

Sint omnia, quae antea. Et quaeratur eadem aequatio $x^3 + \frac{ppx}{2} - bpx - \frac{app}{2} = 0$. cum tertio termino negativo conſtructa per hyperbolem aſymptoticam, & parabolam aut non datam, aut datam in problemate: ſicuti etiam conſtruebatur illa cum tertio eodem termino poſitivo (*propoſit. II. & III*)

Sit igitur $bp - \frac{pp}{2} = + mm$. (*propoſit. V*) Et erit $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Inducatur nova, & non quidem data in problemate parabola $my = xx$. Et erit $myx = x^3$. quare; effecta ſubſtitutione; habebitur $myx - mmx - \frac{app}{2} = 0$. Sit nunc deſcripta parabola $AE$ (*Fig. IV.*) cum parametro $m$. & diametro $AB$. Sumatur ſupra $AB$. intus parabolam portio $AL$ aequalis parametro $m$. Sit $LH$ ex $L$. parallela ordinatis parabolae $AE$. Item fiat ſupra eadem $AB$ intus parabolam recta $AT = \frac{ap}{2m}$. quae maior erit, vel minor quàm $AL$. Ex $T$. educatur $TR$ parabola $LH$. & $= p$, atque aſymptotis $LH$. $LB$. deſcripta ſit

FIG. IV.

fit hyperboles $CD$. per punctum $R$. quae secabit parabolam (*proposit. II.*]. Secet in $N$. Vnde ordinetur $NP$. ad parabolam. Est $NP = +x$. atque $AP$. est $+y$. Perspicuum est, esse $AE$. parabolam $my = xx$. Sed est $LP = y - m$. Et; ob hyperbolem; est $LT \times TR = LP \times PN$. quare erit $xy - mx = \frac{app}{2m}$. sive $myx - mmx = \frac{app}{2}$. quae hyperboles fuit asymptotica. Sunt vero eaedem $x$; & eaedem in curva utraque $y$. Ergo; in locum $mxy$ suffecta eius aequalitate $x^3$ perquisita per parabolam; habebitur $x^3 - mmx - \frac{app}{2} = o$. Vna est interfectio $N$.(*prop.II.*)

Deinde; effectis quae prius; inducatur data in problemate parabola $py = xx$. Et; effecta substitutione; erit $pyx - mmx - \frac{app}{2} = o$. Igitur descripta sit alia parabola $AG$. cum diametro $AH$. & parametro $p$. Sumatur in $AH$. intus parabolam portio $AL = \frac{mm}{p}$. & $AI = p$; quae maior erit, vel minor quàm $AL$. Ex $I$ ducatur $IR = \frac{a}{2}$ parallela ordinatis datae parabolae. Itemque ex $L$. agatur $LK$ parallela $IR$. atque asymptotis $LK$. $LH$. describatur per $R$. hyperboles $EMR$. quae secat eam parabolam (*proposit. III.*). Secet in $B$. unde ad eandem parabolam ordinetur $BN$. Erit $BN = +x$; Et $AN = +y$. Eritque $LM = y - \frac{mm}{p}$

FIG. V.

Et reliqua patent. Et erit inventa aequatio constructa cum primo modo cum hyperbola asymptotica, & parabola non data; cum secundo modo per hyperbolem pariter asymptoticam; & parabolam problematis datam. *Q. E. F.* Vna est interfectio $B$.(*prop. III.*)

Verum enim vero aut unam, aut alteram cooptas ex his constructionibus; unicam semper adsequeris aequationis radicem (*proposit. II. & III.*); cum tamen possit illa tribus esse praedita radicibus possibilibus. (*proposit. IV.*).

# PROBLEMA VIII. GEOMETRICVM.

TAB VI PROBL. VIII. FIG. I

## L E M M A I.

SIt parabola $IAH$. cuius diameter $AO$. ducatur ex diametri vertice $A$. tangens $AF$. curvae in $A$. si sumatur in $AF$. punctum quodvis $B$; unde ducatur alia curvae diameter $BE$ illi occurrens in $E$. atque ex $E$. ordinatim ponatur $EO$. ad diametrum $AO$. illi occurrens in $O$. & curvae in $P$. Et connectatur $BP$. secans curvam in $C$. atque $AO$. in $D$. Erit $BC = CD$. (per doctrinam conicam). Nam erunt in continua proportione $BC$. $BD$. $BP$. Igitur dividendo erit $BC$. ad $CD$. uti $BD$. ad $DP$. sive $EO$ ad $OP$. Inde $BC$ erit $= CD$.

## C O R O L L A R I V M.

EADEM FIG.

Igitur possibile est problema; dato puncto $P$. in parabolae perimetro $AH$. inclinare ex $P$. rectam $PC$. ad aliam perimetrum, ita ut linea interiecta $CD$. inter parabolae diametrum $AO$. & perimetrum sit aequalis datae. Erat enim punctum $B$. acceptum quodvis in tangente $AF$. quare rectè quaeretur; dato puncto $P$ in perimetro; invenire punctum $B$. in $AF$. Vnde ducta dimetro $BE$. parabolae occurrente illi in $E$; fiant rectae $BC$. & $CD$. aequales; unde tam una, quàm altera aequalis erit rectae lineae datae. Igitur huic datae rectae esse potest aequalis $CD$.

## L E M M A II.

EADEM FIG.

SIt datum punctum $P$. in parabola $IAH$. cuius axis $AOV$. ordinetur $POE$ ad parabolam. Non inclinabitur ex $P$. nisi una $PC$ ad aliam perimetrum in locis supra $POE$. ita ut intercepta $DC$. inter axim. & perimetrum ipsam sit aequalis cuidam rectae lineae datae. Etenim sit; si fieri potest; alia $PNM$ ex $P$ ducta propior ad $POE$. quàm sit $PDC$; cuius $POE$ definita pars $NM$ sit aequalis ipsi $DC$. seu rectae datae. Sed est $PD$ ob angulum rectum

in

in $O$. maior. quàm $PN$. Etenim eſt angulus $DNP$. obtuſus. Ergo erit $CP$. maior $MP$: quod impoſſibile ob parabolae naturam; cuius crura ab axi ſemper ſunt divergentia. Itaque patet quod proponitur. Et ubique ſupra $POE$ non erit una $NM$. aequalis alteri $CD$.

II. Idem eveniet infra $POE$. Sint enim ibi duae ex eodem $P$. ductae $PQK$. $PRS$ ad aliam perimetrum in $K$; & $S$. Ordinentur $KR$. $SV$. ſitque $PQK$ propior ad $POE$. quàm $PRS$. Per $S$. agatur $ST$. parallela $AOV$. Cadet $ST$. extra parabolam in plaga verſus verticem $A$. Si enim caderet. intra ſecans $KR$. intus parabolam in $T$; eſſet $KR$ verſus $A$. maior $SV$. remotiori ab $A$. cum ſit $KR$. maior $TR$. & inde maior $SV$. Id autem ob parabolam fieri nequit. Ergo ſecet $PQK$ rectam $ST$ extra parabolam in $T$. Eſt $PR$. maior $PQ$. ob angulum obtuſum $PQR$. cum ſit angulus in $O$ rectus. atqui eſt $PR$. $RS$ :: $PQ$. $QT$. Ergo $RS$ maior erit $QT$. & longe magis maior $QK$. Et ubique infra $POE$. erit una maior $RS$. quàm altera $QK$. Et non duae illic interclufae eſſe poterunt inter axim & perimetrum aequales eidem rectae; aut inter ſe. Igitur ad idem punctum $P$. in parabola datum recta una poteſt in locis ſupra ordinatim poſitam $POE$ tendere; cuius interiecta inter axim & perimetrum ſit data; & altera infra $POE$. eidem datae aequalis; atque non alia.

## LEMMA III.

Sit data parabola $EAB$ cuius diameter, aut axis $AH$. Et ordinatim agantur ad parabolam rectae $NM$. $DP$. ex punctis $N$. & $D$. Iungatur $ND$. ſecans $AH$ in $C$. Erunt ob parabolam continuè proportionales $AM$. $AC$, $AP$. Demonſtratur. FIG. II.

FIG. III.

Quoniam ſi terminata recta linea $BF$. fuerit; in qua continuae ſint Geometricae $BQ$. $BO$. $BF$. demonſtrabitur inde, eſſe $BQ$. ad $BF$. in ratione duplicata $QO$. ad $OF$. atqui proprietas haec eſt linearum $AM$. $AP$. $MC$. $CP$. in parabola. Quandoquidem $AM$. $AP$ :: $MN^2$. $DP^2$ :: $MC^2$. $CP^2$. Ergo erunt in parabola $AM$. $AC$. $AP$. continuè Geometricae. Q. E. D. FIG. I.

De-

FIG. III. Demonstratur nunc in linea terminata $BF$ esse $BQ$, ad $BF$. in ratione duplicata $QO$. ad $OF$; si fuerint continuae $BQ.BO.BF$. Nam erit inde $BO$. ad $BQ$. uti $BF$. ad $BO$. Quare erit $BO - BQ$. sive $QO$; ad $BQ$; uti $BF - BO$; sive $OF$; ad $BO$. Igitur; cum se habeat $QO$. ad $BQ$; veluti $OF$. ad $BO$; sive $BQ$. ad $BO$ sit veluti $QO$. ad $OF$; erit etiam $BQ^2$. ad $BO^2$. veluti $QO^2$. ad $OF^2$. Sed etiam ob eandem proportionem continuam ipsarum $BQ.BO.BF$. est $BQ$ ad $BF$; sicuti $BQ^2$. ad $BO^2$. quare ex aequali ratione erit $BQ$. ad $BF$; sicuti $QO^2$. ad $OF^2$. Et inde $BQ$ ad $BF$ rationem duplicatam habebit illius, quam habet $QO$. ad $OF$. quod ostendendum erat.

FIG. II. Itaque in parabola tres $AM$. $AC$. $AP$. sunt semper continuè proportionales. Similem proprietatem parabolae narrat egregius Gregorius à S. Vincentio parte secunda de parabola in Lib. Quadrat. Circul. alia via demonstratam. Nos eam adsumemus ad hoc conficiendum problema.

FIG. II. FIG. III Iam vero; cum sit $AC$. ad $AM$; uti $AP$. ad $AC$; demonstratur certo idem, quod in recta linea terminata $BF$. nuper praestitum est; esse in parabola $AC - AM$; seu $MC$; ad $AC$; FIG. II. veluti $AP - AC$; nempe $CP$. ad $AP$. Et itaque erit $MC.AC :: CP.AP$. sive $AC.AP :: MC.CP :: NC.CD$. Quare ex aequali erit $NC.CD :: AC.AP$.

## PROPOSITIO I.

FIG. II. Sit data parabola $EAB$. cuius axis $AH$; sitque datum in perimetro $AB$ punctum $N$. Oportet ex $N$. demittere rectam $NCD$ ad aliam perimetrum $AE$. ita ut intercepta $CD$. inter axim $AH$. & perimetrum $AE$. fiat aequalis rectae lineae datae $P$. Ponatur factum esse quod quaeritur. Et ordinatim adplicatae sint ad parabolam rectae $NM.DP$. Est igitur in connexa $ND$. portio $CD$ (*hypothesi*) aequalis $P$.

Sint notae $AM = a$. & $NM = c$. atque data recta $P = CD = b$. Sit vero ignota accepta $NC = x$. Parameterque para-

ra-

rameterque parabolae denominatur $p$. Ergo erit $MC = \sqrt{xx - cc}$. Vnde $AC$ erit $= a + \sqrt{xx - cc}$. atqui est propter parabolam $NC. CD :: AC. AP.$ (*Lemm. III.*) Quare habebitur $x. b :: a + \sqrt{xx - cc}. \frac{ab + b\sqrt{xx - cc}}{x} = AP$. Sed est $CN. NM :: CD. DP$. Scilicet $x. c :: b. \frac{bc}{x} = DP$. atqui ob parabolam est etiam $DP^2$ aequale rectangulo, quod ex $AP$. in parametrum. Ergo erit $\frac{bbcc}{xx} = \frac{pba + pb\sqrt{xx - cc}}{x}$. Et $bcc = pax + px\sqrt{xx - cc}$. Sive $bcc - pax = px \times \sqrt{xx - cc}$. Efficiantur quadrata: & performetur more consueto aequatio: atque habebitur $x^4 - ccxx - aaxx + \frac{2bccax}{p} - \frac{bbc^4}{pp} = 0$. Quae hoc modo construetur.

Adscita sit parabola $qy = xx$. erit $qqyy = x^4$. quare si in comperta aequatione sufficiatur in locum $x^4$ aequalis illi $qqyy$. atque in locum $xx$. aequalitas $qy$. & efficiatur divisio per $qq$; enascetur $yy - \frac{ccy}{q} - \frac{aay}{q} + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq} = 0$. Et ponatur esse $\frac{-cc - aa}{q} = -m$. quare erit $yy - my + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq} = 0$.

Sit nunc parabola $EAH$; cuius vertex $A$. diameter $AK$. parameter $= q$. in $AK$ fiat $AT = m$; scilicet $= \frac{+cc + aa}{q}$. FIG. IV. Ex $A$. excitetur $AD$ parallela ordinatis parabolae $EAH$. & aequalis $\frac{bcc}{2pa} + \frac{mmpqq}{8bcca}$. Et constituatur rectangulum $DBTA$. atque vertice $B$. axi $BTR$. parametro $= \frac{2bcca}{pqq}$. designetur secunda parabola $IBG$. Intersecabunt sese mutuo para-

rabolae in punctis; unde demissae ordinatae $NP$ ad parabolam $EAH$ erunt radices aequationis inventae; seu valores ignotae $x$.

Demonstratur primum per descriptionem Curvarum. Axis enim curvae unius secat axim alterius intus curvam. Ergo curvae concurrere alicubi in punctis debent. Et coëfficiens tertii termini aequationis $-cc - aa$ habet $-$. Vnde subtractus ex tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini secundi; qui est nihilum; facit sane quantitatem positivam. Sed tamen tres octavae partes quadrati ex coëfficiente termini quarti scilicet $\frac{3bbc^4aa}{2pp}$; dempto producto $+ bbc^6 + bbc^4aa$; quod ex postremo termino efficitur in coëfficientem termini tertii; possunt quantitatem positivam, & negativam constituere. Erit enim $\frac{3bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6 - bbc^4aa}{pp} = \frac{1bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6}{pp}$. Potest autem $\frac{1}{2}aa$. maior esse, & minor $cc$. Etenim est $ap = cc$. (per parabolam datam). quare si $\frac{1}{2}a$ sit maior $p$. erit $\frac{1}{2}aa$ maior $cc$. Si vero $\frac{1}{2}a$ sit minor $p$. erit $+\frac{1}{2}aa$ minor $cc$. Igitur $\frac{1bbc^4aa}{2pp} - \frac{bbc^6}{pp}$. quantitas esse potest positiva; & negativa.

Si sit illa negativa; erunt necessario radices fictitiae in aequatione (per demonstrata in algorithmo). Satis enim ad id est; ut una desit ex duabus his conditionibus dictarum quantitatum positivarum. Et etiamsi aliae insint conditiones; nihili interest. Qualis illa una est convenientiae numeri radicum verarum, & falsarum; si qui deest terminus modo fingatur adesse praefixus signo $+$. modo signo $-$. Et inveniatur dicta convenientia [per algorithmum]; sed sane id accidit inventae huic aequationi destitutae termino secundo; & ita de reliquis conditionibus; quamvis

vis illae adſint. Ergo caſus eſſe poteſt radicum impoſſibilium in hac aequatione propter unam; quae deeſt; conditionem; ut omnes radices ſint reales; licet reliquae adſint conditiones. Idem intelligendum eſt de quacumq; Algebrica aequatione. Et ratio eſt manifeſta; cum ſint conditiones neceſſariae. Itaque in hac noſtra aequatione aut duae eſſe poſſunt radices imaginariae; aut etiam omnes quatuor. Inde per algorithmum demonſtrari nequit, radices aliquas eſſe reales in ea aequatione; & problema poſſibile. Verum vero per Geometriam ſyntheticam; tum nimirum quia problema eſt poſſibile per Lemma primum ad id appoſitè praemiſſum; cùm per praedictam neceſſariam, ob deſcriptionem, interſectionem curvarum; quae demonſtratio eſt è ſola Geometria petita; radices aliquae erunt in hac aequatione reales. Igitur; ubi opus; ſyntheticae Geometriae ſubſidium in Algebricam ſuccedat.

Itaque ſi $\frac{1}{2}\, aa$ minor ſit $cc$; unde ſupradicta quantitas ſit negativa; uti dictum; radices quidem erunt in inventa aequatione fictitiae; ſed non omnes quatuor. Et duae erunt poſſibiles. quod oſtenſum eſt. Verum deſit terminus aliquis aequationi ipſi eidem; ſcilicet ſecundus. Igitur (*per algorith.*) radices erunt poſitivae mixtae negativis.

Hinc; ſi omnes ſint poſſibiles radices aequationis inventae; ſeu quatuor ſint interſectionum puncta in curvis deſcriptis; una erit radix falſa; aliae tres verae [per eundem]. Etenim haec convenientia talium radicum comperitur in ipſa aequatione; ſi ſecundus terminus; quo illa caret; modo ſubdatur quaſi praefixus ſigno $+$; modo quaſi ſigno $-$. Si vero duae ſolae poſſibiles ſint radices; profecto una erit vera; altera falſa.

Quod erat primum.

Sint interſectiones $N$. Et agantur ordinatae $NP$. ad parabolam $EAH$. atque $NO$ ad parabolam $GBI$. Sunt $NP$ tendentes ad plagam cruris $AH$ parabolae $= + x$. Et $AP$. ex $A$. verſus $K$ ſunt $= + y$. Hinc in poſitu averſo illae erunt $- x$. & $- y$. FIG. IV. & V.

Perſpicuum eſt, eſſe $EAH$ parabolam $qy = xx$.' Vbivis fiat curvarum concurſus. Sed eſt in altera parabola recta $BO = BT - OT$. aut $= BT + TO$; & $NO = PT = AT - AP$; ſive $= AP - AT$ erit $= \frac{m}{2} - y$; ſive $= y - \frac{m}{2}$; atque $NO^2$ eſt = rectangulo; quod ex $BO$ in parametrum. Ergo erit $yy - my + \frac{mm}{4} = \frac{bbc^4}{ppqq}$ $+ \frac{mm}{4} - \frac{2bccax}{pqq}$: ideſt $yy - my + \frac{2bccax}{pqq} - \frac{bbc^4}{ppqq}$ $= 0$. quae ſecunda erat parabola. atqui ſunt eaedem $x$. & eaedem $y$ in utraque curva. Inde in locum $yy$ ſecundae huius parabolae ſufficiatur eius aequalitas $\frac{x^4}{qq}$ (per primam parabolam); & in locum $my$; ſive $- \frac{ccy - aay}{q}$ aequalitas [per eamdem] $- \frac{ccxx}{qq} - \frac{aaxx}{qq}$. Et prodibit $x^4 - ccxx -$ $- aaxx + \frac{2bccax}{p} - \frac{bbc^4}{pp} = 0$. quae aequatio inventa fuit; & quam conſtruere oportebat.

Ponatur nunc eſſe data parabola $EAB$ illa, in cuius crure $AE$ datum punctum $N$. unde ducenda linea ſit, quam vult problema. FIG. VI. Et ſi quatuor ſint curvarum interſectiones; ſeu quatuor radices poſſibiles; ordinatim tota adplicetur ad parabolae axim $AH$. linea $NMO$. ex dato puncto $N$. atque ex $M$ verſus $H$. contra verticem $A$. ſumatur ſupra $AH$ portio $MC$; cuius quadratum ſit aequale exceſſui quadratorum; quae (*Fig.* IV) ex minima trium radicum verarum $NP + x$. iam determinatarum fiunt; & ex data $c$. Eſt autem ſemper $c$. minor quacumque $x$. ſeu valore illius (*poſitione*). deinde accipiatur ſemper ex $M$. & ſuper eodem axi $AH$. alia recta $MC$. ſed verſus verticem $A$. cuius $MC$ quadratum aequale ſit exceſſui quadratorum; quae ex alia determinata $NP + x$. (*Fig.* IV.) maiori quàm prima accepta. atque

ex

ex $c$. fiunt. Tum ex eodem $M$; pariterque versus $A$. abscindatur tertia $MC$. cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex maxima trium verarum radicum $NP + x$ fiunt; & ex eadem $c$. [*Fig.* IV.] Iungantur dicto ordine $CN$: $CN$. $CN$. & protrahantur donec secent in $D$. perimetrum parabolae: & erunt interceptae $CD$. aequales singulae datae rectae $P$; seu $b$. Id enim positum est. Et tertia $MC$ cadet extra parabolam $A$. Ita enim inter axim $AH$. & perimetrum $AB$ una $CD$. infra $NMO$, & una $CD$. supra $NMO$ cadet eidem datae rectae aequalis (*Lemmat. II.*). Atque ob tertiam $MC$. cuius punctum $C$. cadit extra parabolam; secabit tertia $CN$. perimetrum $AB$. convexam in $D$ parabolae. Quod erat secundum. *Q. F. O.*

## PROPOSITIO II.

Sint quae prius. Potest punctum manere etiam datum in alio parabolae crure $AB$. uti in $K$. & idem quaeri: & huic casui etiam satisfacit, respondetque analysis; quem per quartam radicem falsam $- x$. determinavit. Igitur accipiatur in axi $AH$. portio $AI = \frac{cc}{p}$. Et iungatur $IK$. Erit $IK = c$. ob parabolam. Sit nunc $IQ$ aut versus verticem $A$. aut versus $H$; ut lubet; cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae efficiuntur ex $NP$; nempe $- x$. (*Fig.* IV.) posita ex $N$ versus $B$. atque ex ipsa $c$. Et iungatur $QK$. quae protrahatur ad perimetrum parabolae in $D$. Et erit $QD$ aequalis eidem datae rectae $P$; seu $b$. id enim positum est. Eritque $QK$ (*proposit. I.*) aequalis dictae $NP$ (*Fig* IV.) $= - x$. FIG. VI. FIG. VI.

## PROPOSITIO III.

Sint eadem. Sed intersectiones curvarum fiant duae; duaeque radices sint possibiles; & eadem peragenda sunt. Quoniam ordinata sit ex puncto $N$. supra perimetro $AE$ dato recta $NM$ ad parabolam; atque super $AH$ versus verticem $A$. curvae accipiatur una $MC$ aequalis excessui quadtatorum; quae ex $NP + x$. FIG. VI.

 (*Fig.* V.)

[*Fig.* v.] tendente ex $N$ versus crus $AH$ parabolae fiunt; & ex data $c$. & coniuncta $CN$, productaque ad perimetrum parabolae in $D$. continebit partem $CD = P = b$. Deinde; cum altera radix sit necessario falsa (*per algorith. proposit. I.*) accipiatur super $AH$ portio $AI = \frac{cc}{p}$. uti in praecedenti; & coniuncta $IK$ erit $= c$. Sitque recta $IQ$ ubivis; veluti in antecedenti; sumpta; cuius quadratum sit aequale excessui quadratorum; quae ex altera $NP = -x$. contendente ex $N$ (*Fig.*v.) versus crus $AE$ parabolae; atque ex data $c$. fiunt. & iuncta $QK$, protractaque ad perimetrum parabolae habebit portionem $QD$ aequalem datae rectae $P = b$. Eritque $KQ = NP$ [*Fig.* v.] $= -x$. (*proposit.* I.) Haec enim posita sunt.

FIG. VI.

FIG. VI.

S C H O L I V M.

Quod Lemma secundum demonstrabat de Parabola, eodem omnino modo demonstrat de hyperbole cum axi.

## PROBLEMA IX. GEOMETRICVM.

L E M M A. I.

PROBL. IX.

Sit Circulus $ACBD$. cuius data positione diameter $BA$ (*Fig.* I. II. III. IV. & V.) Et Centrum sit $E$. per quod ducatur ad normam diameter $CD$. Erit divisus circulus in quatuor quadrantes $AED$. $BED$. $AEC$. $BEC$. Datum super unius ex illis circumferentia $AD$. sit punctum $N$. Non inclinabuntur ex $N$ duae $NSO$. $NRP$. ad aliam circumferentiam usque alterius quadrantis; ita ut inclusae $SO$. $RP$. inter diametrum positione datam $AB$. & ipsum quadrantem; uti $AEC$; sint eidem datae rectae lineae aequales. Quae recta aut maior sit, aut minor radio: erit sane minor diametro. Igitur de duabus rectis lineis non aequalibus agitur in uno, & eodem quadrante manentibus.

FIG. I.

I. Sint enim duae rectae $NP$. $NO$. accepto quadrante $AEC$. concurrentes ambae cum diametro $CD$. ad partes quadrantis $AED$. Igi-

Igitur erit angulus $NRE$. acutus; cum per Element. Geometriae debeat angulus $NRE$. cum $DER$ efficere angulos duos minores duobus rectis, ob concursum (*hypoth.*) lineae rectae $NP$ cum recta $CD$. ad partes quadrantis $AED$; & cum sit angulus $DER$. rectus (*constructione*). Ergo erit angulus $NSE$; sive $NSR$. acutus in triangulo $NSR$. tum quia $SN$ concurrit etiam cum recta $CD$; cùm etiam quoniam est in dicto triangulo angulus $NRS$. obtusus. Sed tota una recta $NO$. est minor altera $NP$. (deducitur ex 15. III. Element.) Et quidem illa est minor; cuius pars $NS$. est maior parte $NR$. alterius maioris. Igitur reliqua $SO$. erit necessario minor reliqua $RP$. FIG. I.

II. Ex eodem puncto $N$. ductarum $NP$. $NO$. una $NP$, propior quàm altera ad diametrum $CD$. sit parallela eidem diametro: quare altera $NO$, superior occurret diametro $CD$. ad partes eiusdem quadrantis $AED$. Et per Elem. Geometr. uti num. I. erit angulus $NSE$. sive $NSR$ acutus. Quare erit $NS$ maior etiam $NR$. Et reliqua, uti antea. FIG. II.

III. Sit una $NO$. remotior quàm altera $NP$. à diametro $CD$. parallela eidem $CD$. ambae sint semper ex eodem puncto $N$. ductae. Et occurret altera $NP$. eidem diametro $CD$. ad partes quadrantis $AEC$. Igitur ducta ex $E$ normalis $EI$. in $I$. supra ipsam $NP$. cadet intus eundem quadrantem $AEC$. propter angulum $PRE$. supra dicta ratione Element. Geometr. acutum. Itaque erit $PI$. maior, quàm $OS$. Et longe magis $PR$. maior quàm $OS$. Nam est $NP$. maior $NO$ (deducitur ex 15. III. Elem.) Inde $PI$. maior erit $OS$. FIG. III.

IV. Cadat una $NO$. in quadrantem $AEC$. ita ut conveniat cum $CD$. ad plagam quadrantis $AED$. & cadat altera $NP$. ex eodem $N$. ita ut conveniat cum $CD$. ad plagam contrariam. Sitque $NO$. remotior quàm $NP$. à diametro $CD$. Profecto perpendiculum ex $E$. ductum $EI$. supra $NP$. cadet in plaga concursus duarum $NP$. & $DC$. Et perpendiculum $EM$. ex eodem $E$. supra $NO$. incidet in plaga concursus duarum $NO$. & $CD$. FIG. IV.

*CD* propter angulos *PRE*. & *NSE*. eadem ratione Element. Geometr. ficuti num. 1. acutos. Igitur perpendicula cadent hinc; & hinc à femidiametro *BA*. fed eft *PI* maior *OM*; cum fit *NP*. maior *NO*. ficuti num. 1. dicebatur. Hinc longe magis *PR*. maior erit *OM*. atque magis, magifque *PR*. maior erit *OS*.

FIG. V. V. Ambae *NO*. & *NP*. ex eodem *N*. ductae occurrant diametro *CD*. in plaga quadrantis *AEC*. Agatur ex *P*. parallela *PT*. ipfi *BA*. Eftque *NP*. propior ad diametrum *CD*. quàm *NO*. Vnde circuli ordinata *PH*. maior erit quàm ordinata *OK*. Sequitur ex communi demonftratione 15. III. Elem. Et ipfa *PT*. cadet extra circulum; ubi occurrat rectae *NO*. in *T*. Erunt anguli *PRE*. & *OSE* per Elem. Geometr. acuti. Quare in triangulo *RNS*. obveniet latus *NR*. maius latere *NS*. fed eft *NR*. ad *NP*; ficuti *NS*. ad *ST*. quare erit *RP*. recta maior *ST*. Et longe magis maior quàm *SO*.

FIG. V. VI. Sumatur quadrans *CEB*. Et idem etiam demonftrabitur pro hoc quadrante inferiori ad illum, in cuius circumferentia datum eft *N*. Quoniam agatur diameter *NEM*. Et ducantur *NO*. & *NP*. ex eodem *N*. in hunc quadrantem; quae incidant illuc in parte femicirculi *NCM*. Secet autem *NO* diametrum *CD*. in *S*. & fecet *NP*. eandem *CD*. in *R*. atque diametrum fane aliam *AB*. in *T*. Erit ob angulum *AEC*. (*hypoth.*) rectum, angulus *TRE* acutus in triangulo *TRE*. Hinc angulus *TRS*. feu *NRS*. erit obtufus in triangulo *NRS*. & *NS*. erit maior *NR*. fed per faepe dicta in fuperioribus eft *NO*. minor *NP*. propiore ad diametrum *NEM*. Ergo erit neceffario *SO*. minor *RP*. Sed hic cafus vere huius Lemmatis non eft; uti dicetur.

FIG. EADEM VI. Cadant nunc aedem *NO*. & *NP*. in eundem quadrantem *CEB*. in parte femicirculi *NDM*. & fecet *NP*. diametrum *CD*. in *R*. atque diametrum *AB*. pofitione datam in *T*. Et fecet *NO*. eandem *AB* in *I*. Nunc fimili ratione ac antea n. VI. oftendetur *NI* maior *NT*. fed eft *NO* remotior à diametro *NEM*. minor per faepe dicta quàm propior *NP*. Igitur erit neceffario *IO*. minor

*TP*.

*TP*. Idem fimili modo demonftrabitur pro quadrante *BED*, ac demonftratum eft pro quadrante *AEC*. (*Fig*. I. II. III. IV. & V.) verùm in demonftratione pro diametro pofitione data accipienda eft *CD*; & pro alia diametro fumenda eft *AB*. Et cetera uti antea. Hinc cafus hic non eft huius ipfius Lemmatis; immutatur enim diameter pofitione data. Et eadem ratione non eft huius ipfius Lemmatis cafus numeri VI. qui pertinet ad cafum numeri VII. cum nempe data eft pofitione diameter circuli *AD*. non *AB*. Agit enim Lemma de una pofitione data diametro non immutata: & ; uti numero I. dictum eft; de lineis duabus non aequalibus in uno, & eodem quadrante locatis. Neque alii funt cafus. Igitur a duobus quadrantibus inferioribus aut uno, aut altero (*Fig*. I. II. III. IV. & V.) ideft à femicirculo *ACB* inferiori non tendent in circulo dato ad idem punctum uti *N*. datum in peripheria quadrantis, five femicirculi *ADB* fuperioris rectae duae, uti *PN*. & *ON*. quarum partes *OS*. & *PR*. interceptae a diametro pofitione data, & peripheria femicirculi, vel quadrantis inferioris, manentefque in uno, & eodem quadrante effe poffint eidem rectae datae; quae aut minor, aut maior fit, quàm Circuli radius; aequales *Q. E. D.*

## LEMMA II.

*TAB. VII. PROBL. IX. FIG. VI.*

SIt Circulus *AOBD*. in cuius circumferentia datur punctum *N*. Eius centrum fit *Q*. Et data fit pofitione diameter *AQB*. ducta fit per *Q* ad normam diameter alia *QOD*. Hinc divifus circulus erit in quatuor quadrantes *OQA*. *OQB*. *DQB*. *DQA*. In uno quorum *DQA*. infidit fupra circumferentia datum punctum *N*. dico; ex puncto *N* unam folam inclinari rectam *NCP*. intus quadrantem *OQA*; ita ut intercepta *CP*. inter diametrum pofitione datam *AQB*; & circumferentiam, atque manens tota intus quadrantem fit aequalis femidiametro circuli. Demonftratur eodem plane modo; quo Lemma praecedens. In illius enim demonftratione nufquam putatae funt rectae lineae totae intus quadran-

drantem comprehensae inter diametrum datam, & circumferentiam Circuli; & quae nequeunt esse eidem datae rectae aequales; fore maiores, vel minores radio eiusdem Circuli.

FIG. EADEM. Aliter. Non enim; sed sit alia *NEM*; cuius definita pars intercepta *EM* sit circuli radio aequalis tota intus quadrantem. Iungantur *MQ*, *PQ*. Erit (*hypothesi*) angulus *PQC* = *PCQ* = *ECN*. Item (*hypothesi*) erit angulus *MQE* = *MEQ*. Sed angulus *PQC*. est maior angulo *MQE*. Profluunt enim rectae *NCP*. & *NEM*. ab eodem puncto *N*; atque incidunt *CP*. *EM*. intus eundem quadrantem (*hypothesi*); unde una sit propior ad diametrum *OD* quam altera. Ergo ang. *PQC*. erit maior *MEQ*. sive *MEC*. sed erat *PQC* = *ECN*. Inde *ECN*. ang. internus erit maior externo *MEC*. Quod à ratione maximè abhorret.

Dico secundo; ex eodem puncto *N*. non inclinari intus alium quadrantem *OQB*. nisi solam diametrum *NQH*: cuius portio *QH* interclusa per centrum inter eandem positione datam diametrum *BQA*, & circumferentiam; atque manens tota intus quadrantem sit radius circuli.

Non enim; sed sit alia demissa *NIK*. ex *N*. intus dictum quadrantem; cuius portio definita *IK*. sit radio circuli aequalis tota intus quadrantem. FIG. EADEM. Connectatur *KQ*. Erit angulus *KQI* [*hypoth*] aequalis *KIQ*. sed *KQI* est minor recto; Ergo minor erit recto *KIQ*. Inde maior recto erit *NIQ*. atque est minor recto *AQN*. Vnde maior recto *NQI*. Et igitur in triangulo *NQI*. anguli duo in *Q*. & *I*. erunt singuli maiores recto; seu obtusi. Quidnam vero isthuc monstri erit?

S C H O L I V M.

Perspicuum est, in secunda demonstratione huius Lemm.[is] contineri casus omnes positionum diversarum; quas lineae praedictae *NM*. *NP*. accepto quadrante *OQA*; possunt obtinere: illique sunt iidem cum expositis; uti liquet; in Lemmate praecedenti. Nam in demonstrationem secundum huius Lemmatis nullum iniit medium elementum in aliqua dictarum positionum innixum.

## PROPOSITIO I.

SIt in dati Circuli *ADI*. circumferentia datum punctum *N*. oportet ex *N*. demittere rectam *NM* ad aliam circumferentiam; ita ut eius portio *CM*. conclusa inter diametrum positione datam *BA*. & circumferentiam sit aequalis datae rectae lineae P. liquet *P*. esse debere diametro minorem. Pertractatum ab aliis est problema; sed; quod norim; de sola interclusa *CM*, quae sit aequalis radio. Generalius igitur hic illud proponitur; & nostris solutionibus, & demonstrationibus quivis casus problematis conficietur. FIG VII.

Ponatur factum esse quod quaeritur. Demittantur ex *N*. & *M*. ordinatae circuli *NO*. *MP*. ad diametrum *BA*. Cadere posset *NO* aut in circuli centrum *Q*. aut extra. Cadat extra. Dicetur in prop.ne VII. de alio casu faciliori. Cadet autem semper inter punctum *C*. & *B*. ipsa *NO*; cum sit circuli ordinata. Dividetur igitur *BA*. in duo inaequalia *BO*. *OA*. sit *OA*. pars maior. & *OB*. pars minor. Erit *OB*. minor radio. & *OA* maior eodem radio. Inde per circulum erit *OB*. minor *ON*. quae quidem *ON* est minor radio (*hypoth.*).

Dictae sint datae, & cognitae $BO.\ c.$ & $ON.\ d.$ & circuli diameter $AB.\ a.$ Ignota vero sit $BC.$ & denominetur $x$. Erit $CA = a - x$. Et $OC = BC - BO$ erit $= x - c$. data vero $P$. adpelletur $b = CM$. Nunc est per circulum $AC \times CB = NC \times CM$. quare erit $ax - xx = NC \times b$. Inde fiet $NC = \frac{ax - xx}{b}$.

Sed est $CN.\ NO :: CM.\ MP$. Igitur erit $\frac{ax - xx}{b}.\ d :: b.\ MP$. Hinc $MP$ erit $= \frac{bbd}{ax - xx}$. atqui est quoque $NO.\ OC :: MP.\ PC$. nempe $d.\ x - c :: \frac{bbd.}{ax - xx}.\ PC$. Quadere $PC$

 effi-

efficietur $= \frac{bbx - bbc}{ax - xx}$. Sed eſt $MC^2 = MP^2 + PC^2$. Quare erit $bb = \frac{b^4dd + b^4cc - 2b^4cx + b^4xx}{aaxx - 2ax^3 + x^4}$. atque $bbx^4 - 2abbx^3 + aabbxx = b^4dd + b^4cc - 2b^4cx + b^4xx$. Inde conformata aequatio erit $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. Conſtruetur autem ſic.

Adſciſcatur parabolicus locus $ax - xx = by$. Et erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = bbyy$. Subſtituatur $bbyy$ in aequatione inventa loco huius, quam habet, aequalitatis: & habebitur $yy - xx + 2cx - dd - cc = 0$. quae hyperboles eſt aequilatera. Modo ſit $AI = \frac{aa}{4b}$. atque vertice $A$. diametro $AIS$. parametro $= b$. deſcribatur parabola $TAL$. deinde per $I$. agatur $DIB$ parallela ordinatis deſcriptae parabolae. Et ſit $DB = 2d$. diviſaq; bifariam in $O$. Accipiatur in $DB$. ex $O$ verſus $B$. portio $OC = c$. atq; ex $C$. verſus parabolam $AT$ ſumatur $CI =$ ſemidiametro dati Circuli $= \frac{a}{2}$. & diametro ſecunda $DB$. deſcripta ſit hyperboles aequilatera $KFR$ cum ſua oppoſita $HEG$. ordinatas habens parallelas ipſi $AIS$. Dico primo; has duas curvas mutuo interſectum iri. Secundo; interſectiones fore in punctis; unde ordinatae deductae $PN$ ad $DOB$ praebebunt abruptas ſupra ipſa $DB$. radices $CN$. aequationis inventae, ſeu valores ignotae $x$. Tertio; (quod tertium propoſitione inſequenti demonſtrabitur) aut quatuor, aut duas eſſe interſectiones: inde aut quatuor, aut duas eſſe iuxta hanc problematis ſolutionem radices aequationis inventae. Demonſtratur primum. Nam per deſcriptionem diameter parabolae, & diameter ſecunda hyperbolis ſeſe interſecant. Igitur Curvae mutuo concurrere in punctis debent. Et $aa - bb$ coëfficiens tertii termini aequationis inventae ſubtractus ex tribus octavis partibus quadrati coëfficientis termini ſecundi; ſcilicet

FIG. IX.

cet ex $\frac{3}{2}$ $aa$ facit sane quantitatem positivam. itemque tres octavae partes quadrati ex coëfficiente termini quarti; nempe $\frac{3}{4}$ $b^4cc$; dempto producto $- aabbdd - aabbcc + b^4dd + b^4cc$; quod ex postremo termino fit in coëfficientem termini tertii; constituunt (*constr.*) pariter quantitatem positivam $\frac{3}{4}$ $b^4cc + aabbd + aabbcc - b^4dd - b^4cc$. quae duae conditiones sunt; alterutra quarum si desit; non deest autem hic ulla; radices erunt in aequatione quarti gradus fictitiae (*per algorith.*). Quare; cum demonstretur has curvas necessario sese intersecare per descriptionem; ratum, firmumq; semper iterum fiet, quod demonstrat de radicibus fictitiis aequationum quarti gradus ipse algorithmus. (*Schol. proposit. unicae problem. II. Et alibi*). Quod erat primum. Sunt verò (*per eumdem algorith.*) tres radices verae, una falsa; modo sint omnes quatuor possibiles.

Demonstratur secundum. Demittantur ordinatae $PM$ ad parabolam, & $PN$ ad diametrum secundam hyperbolis ex intersectionibus $P$. duarum curvarum. Sunt $CN$ ex $C$ versus $P$. $+x$. Scilicet radices verae. atque $NP$ ex $N$ versus $A$. parabolae verticem sunt $+y$. Inde $CN$ ex $C$ versus $B$. erit radix falsa $-x$. Et ipsae $NP$. ex $N$ ad plagam aversam eidem $A$. erunt $-y$. Sed ob parabolam est $PM^2$; scilicet $\overline{CI - CN}^2$; vel $\overline{CN - CI}^2$; aut $\overline{IC + CN}^2$; idest $\frac{aa}{4} - ax + xx$; aequale rectangulo, quod ex $AM$ fit, sive ex $AI - IM$; vel $AI + IM$ in parametrum $b$. quare erit $\frac{aa}{4} - ax + xx = \frac{aa}{4} - by$; inde $by = ax - xx$. Quae parabola fuit inducta. Atqui ob hyperbol.^m^ aequilateram habetur $PN^2 = ON^2 + DO^2 = \overline{CN - CO}^2 + DO^2$; vel $= \overline{CO + CN}^2 + DO^2$. Igitur erit $yy = xx - 2cx + cc + dd$; inde $yy - xx + 2cx - cc - dd = 0$. Qui locus fuit hyperbolicus.

FIG. EADEM.

 Et

Et ſunt eaedem $x$. & eaedem $y$ in utraque curva. quare ſi in hyperbole in locum $yy$. ſuccedat eius aequalitas; quam deſcripta praebet parabola; prodibit aequatio $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. quae erat conſtruenda.

Iam vero ſi omnes radices aequationis ſint poſſibiles; quod eveniet, ſi curvae in quatuor punctis ſeſe ſecabunt; erunt iuxta ſucceſſionem ſignorum $+$; aut $-$. in inventa aequatione radices tres poſitivae, & una negativa (*per algorith.*). ſi autem duae ſint interſectiones; unde radices aequationis duae poſſibiles; erunt autem certè duae; curvae enim; uti dictum; ſeſe neceſſario interſecant; tunc ſane radix una erit poſitiva; altera negativa. Nam aequationis termini non ſunt omnes poſitivi; ſeu praefixi ſigno $+$. itemque non comperitur in illis conſecutio ſignorum $+$; & $-$. quare (*per algorith.*) radices verae ſunt falſis immixtae. Et inde patet quod dicitur.

Itaque; ſi interſectiones quatuor ſint curvarum, & inde radices aequationis quatuor; ſumantur ordine ſuper dati circuli diametro $BA$. ex $B$. verſus $A$. una $BC$. aequalis minimae $CN$. ex determinatis ſupra $BD$. & tendentibus ex $C$. verſus parabolam $AT$. quae minima $CN$. eſt minor $CI = \frac{a}{2}$. ſeu radio $BQ$. circuli dati (*per deſcriptionem curvarum; & conſtruction.*) deinde alia $BC$. aequalis ſecundae $CN$, quae ratione eadem eſt maior radio $BQ$; atque tertia $BC$ aequalis maximae $CN$; profecto maiori quàm ipſe radius $BQ$. eadem ratione. Poſtea in plaga averſa ipſi $A$. accipiatur quarta $BC$. aequalis $CN$; ſitae ex $C$. verſus parabolam $AL$. & illae $CN$ fuerunt $+x$. haec vero poſtrema fuit $-x$. Et (*Fig.* VIII.) iungantur puncta $C$. & $N$. & $CN$. protrahantur ad circuli peripheriam in $M$. eruntq; ſingulae $CM$. aequales datae rectae $P$. ſive $b$. id enim poſitum eſt. atqui intus unum quadrantem $BQP$; & unum $AQP$. una locabitur recta tendens ad idem punctum $N$. datum in ſuperiori quadrante $BQI$. aequalis rectae datae (*Lemm. I.*) Ergo ex $B$ verſus $A$. duae $BC$. manebunt in-

FIG. IX. & VIII.

tus

tus circulum; & tertia $BC$. extra illum. Ita enim una $CM$. & una $CM$ in uno; & altero quadrante $BQP$. & $AQP$. posita erit aequalis rectae datae. Indeque ipsarum $CM$. tres pertingent ad curvamen circuli cavum, & una ad convexum, singulae $= P = b$.

Si autem duae sint curvarum intersectiones; tunc super eadem diametro $BA$ circuli dati sumatur una $BC$. ex $B$. versus $A$. aequalis determinatae $CN + x$. ex $C$. scilicet tendenti versus $D$. & quae $CN$. est maior $CI$. seu circuli radio $BQ$. [*per descriptionem curvarum*; *& constructíon*.] deinde altera accipiatur $BC$. in plaga aversa ipsi $A$. aequalis alteri $CN - x$. tendenti ex $C$. versus $B$. atq; coniungantur (*Fig.* VIII.) $CN$. protractae usque ad peripheriam circuli in $M$. Et erunt singulae $CM$ aequales rectae datae $P$. seu $b$. Id enim positum est. Ambae vero ad circulum pertinebunt cavum. Quod erat secundum.

FIG. VIII. & X.

## PROPOSITIO II.

Demonstratur nunc quod erat tertium propositionis praecedentis. Sint omnia quae antea. Quatuor esse possunt intersectiones curvarum iuxta hanc problematis solutionem; & etiam duae. Demonstratur. Ducatur ex $F$ vertice hyperbolis $KFR$ parallela $FL$ ipsi $BID$. secans $AI$ in $L$. Erit $FO = LI$. Est $FO$. semidiameter coniugata curvae; & aequalis $BO$ (*per descriptam hyperbolem aequilateram*) $= d$. (*costruction.*) Est autem $d$. ordinata circuli dati; & minor (*hypoth.*) semidiametro $\frac{a}{2}$. circuli.. Deinde $b$. recta data est minor diametro $a$. sed esse potest maior; aut minor quàm $\frac{a}{2}$; non quidem illi aequalis (*hypoth.*). atque est $AI = \frac{aa}{4b}$. [*Constructíon.*]

FIG. IX. & X.

Nunc sit $a = 7$. & $b = 4$. inde $b$ erit minor $a$; sed maior $\frac{a}{2}$.

Et

Et erit $AI = \frac{49}{16} = 3 + \frac{1}{16}$. Inde $AI$ erit minor $\frac{a}{2}$ seu radio. quare si $d$. sit $= 3$; erit $FO = 3$. Et inde $FO$, seu $IL$ minor quàm $AI$. aut si $d$. sit $= 3 + \frac{1}{16}$; erit $FO = 3 + \frac{1}{16}$. & igitur $FO$. seu $IL$ aequalis erit ipsi $AI$. Hinc primo casu erit $LI$. minor $AI$. secundo vero erit $LI = AI$. Igitur secundo casu vertex $A$. parabolae incidet in $L$. & non secabit parabola nisi in duobus punctis unam hyperbolem $HEG$. sed primo casu idem vertex cadet supra $L$. & parabola potest secare curvam hyperbolicam in duobus; aut in quatuor etiam punctis.

FIG. IX. & X

Modo sit pariter $a = 7$. sed $b = 3$. inde $b$ erit minor $a$; & minor $\frac{a}{2}$ atq; erit $AI = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12}$. Et inde $AI$ erit maior radio $\frac{a}{2}$. & igitur longe magis maior erit quàm $d$. seu quàm $FO$; vel $IL$. Et vertex hoc etiam casu ita ibi manere potest positus; ut parabola secet curvam hyperbolicam aut in duobus; aut etiam in quatuor punctis; uti antea. Igitur patet quod propositum est; quatuor esse posse curvarum intersectiones, aut etiam duas: indeque quatuor esse aequationis radices; aut duas. Quod erat tertium.

FIG. IX. & X.

## PROPOSITIO III.

Sint omnia quae antea. Fuit recta $CI$. in praecedenti constructione propositionis primae minor quàm $DB$. nempe fuit dati circuli semidiameter $\frac{a}{2}$. minor $2d$, seu (*Fig.* VII.) minor $2NO$. Potest autem esse maior $\frac{a}{2}$ quàm $2NO$; seu quàm dupla ordinata. Si sit (est vero semper [*Fig.* IX.] $CI$. maior $BO$. nempe est simplici ordinata $NO$; seu $d$. (*Fig.* VII.) radius $\frac{a}{2}$ semper maior; non est enim ordinata $NO$. radius circuli, uti praefati sumus

FIG. IX.

mus); tunc accipiatur in analysi (*propos. I. Fig.* VII.) pars data maior $AO$; non vero pars data; uti ibi sumebatur; minor $BO$. ex duabus; in quas dispertitur diameter $BA$. Itaque dicatur tunc

$AO$. $c$. Ergo erit $AO = c$. maior radio $\frac{a}{2}$ (*construction.*) & per FIG. VII.

circulum maior quoque quàm $ON = d$. Et plane eadem evadet aequatio $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbdd - bbcc = 0$. Quae simili modo construetur. FIG. XI. & XII.

Quoniam sit constructio; uti supra (*proposit. I.*) & sit $DB = 2d$; atque divisa bifariam in $O$. Verùm sumatur in $DB$, sed protracta ad partem $B$. recta $IC = c$. Et recta $OC = \frac{a}{2}$. quae $OC$. minor quidem erit quàm $IC$. seu $c$. (*construction.*); sed maior quàm $DB$. seu $2d$. [*hypothesi*]. Erit etiam $CI$; seu $c$. maior quàm $BO$. seu $d$. (*construction.*) Et reliqua sicuti in superioribus (*propositione I.*). Et valent etiam hoc casu, quae propositione II. praecedenti demonstrantur. Non enim ibi accepta fuit aut pars maior $AO$. aut minor $BO$. [*Fig.* VII.] duarum, in quas divisa erat diameter $AB$ (*proposit. I.*) circuli in analysis contextu. Itemque ibi posita fuit ordinata $NO = d$. minor radio circuli. Ergo patet quod propositum est.

## PROPOSITIO IV.

Sint pariter omnia, quae antea. Sed quaeratur interclusa $CM$ [*Fig.* VII. *proposit. I.*] inter diametrum positione datam $BA$. & circumferentiam aequalis radio, tendens quidem ad datum punctum $N$. in alia circumferentia.

Instituenda est omnino eadem analysis; quae in eadem propositione I., Accipiatur autem non pars maior $AO$; sed minor $BO$; pariter uti ibidem; ipsarum duarum, in quas diameter $BA$. ab ordinata data $NO$. dividitur. Igitur sit $BO = c$. sicuti illic efficitur. Item ponatur ipsa ordinata $NO$. non esse circuli radius. FIG. VII.

dius.

dius. de quo caſu dicetur propoſitione VIII. Et reliqua uti ibi (*propoſitione* I.) Ergo ſi in aequatione $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + 2bbcx - bbcc - bbdd = 0$. ſubeat $\frac{aa}{4}$ in locum $bb$; reddetur illa $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{aacx}{2} - \frac{aacc - ddaa}{4} = 0$. Conſtructur autem ea ſic.

Arceſſitus ſit parabolicus locus $ax - xx = ay$. Vnde erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = aayy$. & vice $x^4 - 2ax^3$ ſufficiatur haec eius aequalitas $aayy - aaxx$ in inventa aequatione; & reddetur illa $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. Sed etiam ob eundem arceſſitum locum parabolicum erat $-\frac{x^2}{4} = \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4}$. Igitur ſi in $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. vice $-\frac{xx}{4}$. ſufficiatur haec eius aequalitas $\frac{ay - ax}{4}$; habebitur quoque $yy + \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$

TAB. VIII. & VII. Qui locus alter eſt ad parabolam.

FIG. XIII. Sit nunc recta $AI. = \frac{a}{4}$. Et vertice $A$. diametro $AIS$. parametro $= a$. deſcribatur parabola $BAE$. Nunc agatur per $I$. parallela $KID$. ordinatis deſcriptae parabolae. & ſit in $KID$ recta $IC = \frac{a}{2}$; ſive aequalis dati circuli radio. atque in poſitu contra punctum $I$. efficiatur $CD = \frac{dd + cc}{a - 2c} + \frac{aa}{16 \times a - 2c}$.

FIG VII. FIG. XIII. Eſt quidem $a$ maior $2c$. cum ſit $BQ$, ſeu $\frac{a}{2}$ maior (*hypoth.*) quàm $BO$; ſive quàm $c$. Deinde ex $D$. educatur ipſi $AÇ$. parallel-

rallela $DT$; & $= \frac{a}{8}$. Et agatur $TG$. parallela $DIK$. atque vertice $T$. diametro $TG$. ordinatisque; quae sint aequidistantes diametro $AIS$ primae parabolae; atque parametro $= \frac{a - 2c}{4}$ describatur secunda parabola $HTF$. dico primo; has duas curvas sese intersecare in punctis; unde; secundo; demissas rectas parallelas $AIS$ abscindere in $DH$ radices inventae aequationis, seu valores ignotae $x$; atque; tertio; parabolae $HTF$ semitam pervadere per verticem $A$ alterius parabolae $BAE$. &; quarto; ipsam $BAE$. traiici per datum punctum $C$. quod determinatur in constructione aequationis inventae contexenda (*proposit. I.*). Demonstratur primum per descriptionem curvarum. Diameter enim $TG$ unius curvae secat diametrum $AIS$. alterius intus Curvam.

Demonstratur Secundum. Quoniam sint puncta intersectionum $P$; unde ordinentur $PM$. ad primam descriptam parabolam; & $PO$. ad secundam; quae $PO$ secent $DK$ in $N$. Sunt $CN$. ex $C$ versus $K = + x$. Et $PN$ ex $P$ versus verticem $A$. sunt $+ y$. Hinc in locis contrariis erunt illae $- x$. & illae $- y$ atqui ob parabolam $BAE$ est $PM^2$; sive $\overline{CI - CN}^2$; vel $\overline{CN - CI}^2$ aut $\overline{CI + CN}^2$, aequale rectangulo; quod ex $AM$; nempe $AI - NP$; aut $AI + NP$ efficitur in parametrum $a$. Ergo erit $\frac{aa}{4} - ax + xx = \frac{aa}{4} - ay$. Scilicet $ax - xx = ay$. qui novus inlatus fuit locus ad parabolam.

Post hac; ob alteram parabolam $HTF$; est $PO^2$. sive $\overline{PN + NO}^2$. aut $\overline{PN - ON}^2$ aequale rectangulo; quod ex $OT$; sive $ND$; idest ex $DC + CN$; vel $DC - CN$ constituitur in parametrum $\frac{a - 2c}{4}$. Igitur habebitur $yy + \frac{ay}{4} + \frac{aa}{64} = \frac{dd + cc}{4} + \frac{aa}{64}$

$\frac{aa}{64} + \frac{ax - 2cx}{4}$. Ergo erit $yy + \frac{ay}{4} - \frac{ax}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. qui alter erat locus ad parabolam. atqui ſunt in utraque curva eaedem $x$. & eaedem $y$. Igitur loco $\frac{ay}{4} - \frac{ax}{4}$ ſufficiatur in hac aequatione aequalitas illius $- \frac{xx}{4}$ (per primam inlatam parabolam); & erit $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. tum [per eandem parabolam] habetur quoque $yy = xx - \frac{2x^3}{a} + \frac{x^4}{aa}$. Quamobrem; ſi $yy$ in hanc aliam ſuam demutetur aequalitatem; exorietur $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{caax}{2} - \frac{aadd}{4} - \frac{ccaa}{4} = 0$. quae inventa aequatio fuit; & erat conſtruenda.

Habet autem illa (*per algorith.*) radices tres veras, unam falſam: ſi omnes ſint poſſibiles. Poſſunt autem eſſe. Quod infra cognoſcetur. [*propoſit. V.*].

Iam vero ſint interſectiones quatuor curvarum, & inde quatuor aequationis reales radices. Itaque ſupra $BA$. accipiantur ordine ex $B$. verſus $A$. rectae $BC$. quarum prima ſit $BC$. aequalis minimae $CN$ ex determinatis ſupra $DIK$. & tendenti ex $C$. verſus parabolam $AB$. Secunda ſit radius $BQ = CI$. Eſt quidem $CI = \frac{a}{2}$, ſeu aequalis radio; (*propoſit. I.*); & tertia $BC$. ſit aequalis $CN$. pariter contendenti ex $C$ verſus parabolam $AB$. & maiori quàm prima $CN$. & quàm $CI$; ſeu quàm radius $BQ$. Et quarta $BC$. ſit aequalis $CN$. in poſitu contrario prae reliquis; ſcilicet ex $N$. vergenti ad parabolam $AE$. Et ſunt prima recta $BC$. radiusque $BQ$. & tertia $BC$ locatae in eadem plaga ex $B$. verſus $A$: inde reſpondent tribus radicibus $+x$. poſitivis inventae aequa-

FIG. VIII. & XIII.

FIG. VIII.

aequationis. atque quarta $BC$. contrariè fita; uti dictum eſt; convenit radici falfae $-x$. eiufdem aequationis.

Nunc adiungantur rectae $CN$. radiuſque. $QN$. ad datum punctum $N$. Et producantur ad circumferentiam in $M$. Et erunt rectae $CM$. $QM$. $CM$. ex $B$ verſus $A$; (ſed recta tertia $CM$. cadet extra circulum; uti dicetur); atque $CM$. in poſitu contrario aequales ſingulae radio dati circuli $BNAP$. Id enim poſitum eſt. atqui una intus unum quadrantem $BQP$. & una intus $AQP$. locabitur recta tendens ad idem punctum $N$. datum in ſuperiori quadrante $BQI$. aequalis radio (*Lemm. II.*). Ergo duae nempe $BC$. minor radio; ex dictis; & altera ſcilicet ipſe radius $BQ$ ex $B$ verſus $A$. tendentes manebunt intus circulum. & duae $BC$. una ex $B$. verſus $A$; & altera in plaga averſa locabuntur extra circulum. Ita enim una $CM$ in quadrante $BQP$. & una $QM$; nempe radius; in quadrante $AQP$. poſita erit; aequales ſingulae radio: atq; ambae pertinebunt intus circulum ad cavum illius curvamen: & duarum $CM$. extra circulum poſitarum pertinget una ad convexam, altera ad cavam peripheriam. Quod erat ſecundum.

FIG. VIII.

Cum ſit $AI$ (*conſtruction.*) $= \frac{a}{4}$. Et $a$ ſit parameter parabolae $BAE$; unde $I$, foret focus; ſi $AIS$. axis; profecto quadratum ordinatae ex $I$ ductae ad parabolam $AE$ erit $= \frac{aa}{4}$. Igitur ordinata erit $\frac{a}{2}$. ſed eſt $IC = \frac{a}{2}$. Ergo $C$. manet in curva $AE$. Quod erat Tertium.

FIG XIII.

Deinde una recta determinans quaeſitam $CM$. aequalem radio eſt ipſemet $BQ$. radius. atqui $BC$. fuere ſupra $BA$. rectae illae determinantes praedictas $CM$. & fuerunt $+x$. atque in omni aequatione adhibita ad conſtructionem eſt eadem $+x$. Quare ſumatur aequatio $xx - ax = ay$. in qua fiat $x$ aequalis radio $\frac{a}{2}$. eritque $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{4} = ay$. Inde erit $y = \frac{a}{4} =$ (*per fabricam*)

FIG. VIII.

 $AI$,

FIG. XIII. $AI$. Et sunt rectae $PN + y$ illae, quae ex concursu curvarum ducuntur supra $DCIK$ parallelae ipsi $AI$. Ergo concurrent curvae in vertice $A$. parabolae $BAE$. Et alterius parabolae semita $FT$. traiicietur per $A$.

FIG. XIII. Demonstratur id aliter. Occurrat $AI$ ipsi $TG$ in $R$. Nunc FIG. VII. est $BO = c$. atque $NO = d$. Igitur erit $dd = ac - cc$ [ *per Circulum* ] & inde $\frac{dd + cc}{4}$ erit $= \frac{ac}{4}$. atqui erit ordinata $AR$ FIG. XIII. parabolae $FTH$; si transit illa per verticem dictum $A$; aequalis $AI + IR = AI + DT = \frac{a}{4} + \frac{a}{8}$ ( *per fabricam* ) $= \frac{3a}{8}$. Itaque $AR^2$ erit $= \frac{9aa}{64}$. Et esse idem $AR^2$ debet aequale rectangulo, quod ex $RT$ in parametrum $\frac{a - 2c}{4}$. constituitur ob ipsam parabolam $FTH$. Est autem $\frac{9aa}{64}$ reapse aequale huius rectangulo. Nam est $RT = ID = IC + CD = \frac{a}{2} + \frac{dd + cc}{a - 2c} + \frac{aa}{16a - 32c}$. Igitur conficiatur dictum rectangulum; & illud erit $\frac{dd}{4} + \frac{cc}{4} + \frac{aa}{64} + \frac{aa}{8} - \frac{ac}{4}$. Sed est $\frac{dd + cc}{4} = \frac{ac}{4}$. Quare erit illud rectangulum $= \frac{aa}{64} + \frac{aa}{8} = \frac{9aa}{64}$. Et inde erit $AR^2$ aequale illi rectangulo. Et curva parabolica $FT$. perducetur per $A$. verticem alterius parabolae. Quod erat quartum *Q. E. O.*

## PROPOSITIO V.

FIG. XIII. Si punctum $T$. vertex parabolae $FTH$. incidat; uti hactenus; extra parabolam aliam $AE$. aut supra illam; quatuor erunt concursus curvarum iam determinati. Si cadat intra parabolam $AE$; tunc non nisi duo erunt occursus; unus in vertice $A$. alter in $P$. intus an-

angulum $SRG$; five ad partes parabolae $AB$. Et una determinans rectam quaesitam erit $CI$. scilicet circuli radius; altera erit $CN$ ex $C$ versus $K$. Quare sumatur tunc supra $BA$ recta una $BC$ ex $B$; versus $A$; est enim $NC \rightarrow x$. sed sit ipsa $BC$ maior radio. Etenim est $NC$, maior $CI$, seu radio; per descriptionem curvarum. Altera vero determinans quaesitam est ipsemet radius $BQ$, atqui ex eodem puncto $N$. una tantum recta aequalis radio inclinabitur intus quadrantem $BQP$. & una tantum intus quadrantem $AQP$. [*Lemm. II.*]. Igitur accepta $BC$. maior radio cadet extra circulum. Ita enim; si iungatur $QN$. & $CN$. & protrahantur ad peripheriam in $M$; erit sane una $QM$ quaesita aequalis radio; scilicet idemmet radius; pertingens quidem ad circulum cavum: & altera quaesita radio quoque aequalis erit $CM$; pertingens ad circulum convexum. Id enim positum est. Et non nisi recta una ex $N$. prodiens posita erit intus quadrantem $AQP$. aequalis radio; quae est ipse radius.

FIG. XIII. & VIII.

## S C H O L I V M.

In nostra aequatione tres octavae partes quadrati ex $2a$ coëfficiente termini secundi, nempe $\frac{3aa}{2}$; dempto $\frac{3aa}{4}$ coëfficiente termini tertii constituunt quantitatem positivam. Itemque tres octavae partes quadrati ex $\frac{aac}{2}$. coëfficiente termini quarti; dempto $-\frac{3a^4cc - 3a^4dd}{16}$. producto, quod fit ex termino postremo ducto in coëfficientem termini tertii; faciunt sane quantitatem positivam. Igitur (*per algorith.*) indicium alterutrum nequaquam adest radicis fictitiae in aequatione inventa. Et; per constructionem, descriptionemque curvarum; sese illae necessario alicubi intersecabunt. Aliam nunc parabimus constructionem aequationis inventae, quae necessario radices quatuor producat

aequa-

aequationis; quare semper casus omnes conficiet problematis, Proinde illam commenti sumus.

## PROPOSITIO VI.

### ALIA CONSTRUCTIO.

Adinventa aequatio fuit $x^4 - 2ax^3 + \frac{3aaxx}{4} + \frac{aacx}{2} - \frac{aadd - aacc}{4} = 0$. atque; ubi primo in locum $aayy - aaxx$ successerit illius aequalitas $x^4 - 2ax^3$; evadebat aequatio $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. Construetur autem ea hac via,

FIG. XIV. Sumatur $AI = \frac{a}{4}$. & diametro $AIS$ parametro $= a$. designata sit parabola $RAO$. verticem habens $A$. Per $I$. agatur $IRV$ parallela ordinatis descriptae parabolae. Fiat in $IRV$ portio $CI = \frac{a}{2}$. atque $CQ = c$. Est vero (*hypoth.*) $c$ minor $\frac{a}{2}$. (*proposit. IV.*) deinde in eadem $IRV$. sit $DQ = d$. eique aequalis efficiatur $QB$. Est etiam (*eadem hypoth. proposit. IV.*) ipsa $d$. minor $\frac{a}{2}$. sed maior quàm $c$. Nunc diametro secunda $BD$. parametro vero $= \frac{BD}{4} = \frac{d}{2}$; ordinatisq; ad diametrum secundam parallelis ipsi $AIS$ comparata sit hyperboles $GEH$ cum opposita $TFK$. dico primo, ductas rectas ex intersectionibus curvarum parallelas diametro $AIS$. parabolae abscindere supra $BQDR$. lineas aequales petitae $x$. & problemati satisfacientes. Et secundo; quatuor necessario esse intersectiones; inde quatuor habendas esse $x$. Quoniam curvae per descriptionem sese equidem intersecabunt; sint autem intersectionum puncta $P$. Unde demittantur

PM

*PM* ad parabolam, & *PN* ad diametrum secundam hyperbolis ordinatim adplicatae. Sunt quidem *CN*. ex *C* tendentes versus *B* $+x$; atque *PN* ex intersectionibus tendentes ad *IRV*. sunt $+y$. & in plagis contrariis erunt illae $-x$. & istae $-y$. uti in praecedentibus. Igitur $QN = QC - CN$; aut $= CN - CQ$; vel $= QC + CN$ erit $= c - x$. vel $= x - c$. Profecto descripta parabola *RAO* demonstrata in superioribus est locus esse parabolicus $ax - xx = ay$. Vnde erit $yy = \frac{x^4}{aa} - \frac{2x^3}{a} + xx$. atqui ob hyperbolam ad secundam diametrum habetur $PN^2 . QD^2 + QN^2 :: \frac{DB}{4} . DB :: \frac{1}{4} . 1$. Quare erit $yy . dd + xx - 2cx + cc . \frac{1}{4} . 1$. Et inde erit $yy = \frac{dd}{4} + \frac{xx}{4} - \frac{2cx}{4} + \frac{cc}{4}$. Sive $yy - \frac{xx}{4} + \frac{cx}{2} - \frac{dd - cc}{4} = 0$. quae hyperboles erat construenda. Inde loco $yy$ in hac aequatione supponatur $\frac{x^4}{aa} - \frac{2x^3}{a} + xx$. Et efficietur $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{aacx}{2} - \frac{aadd}{4} - \frac{aacc}{4} = 0$. Quae aequatio fuit inventa; & quam construere oportebat. Et pertransibit hyperboles per verticem *A* parabolae. atq; ipsa parabola ducetur per punctum *C*. Vti supra (*propos. IV.*) de duabus parab.^lis dictum est. Eodem enim modo hic ea ostendentur. Sumantur nunc supra *BA* data circuli diametro tres *BC*. *BQ*. *BC*. ex *B*. versus *A*. quarum *BQ*. est radius; aequales ordine; sicuti in superioribus; [*proposit. IV.*] ipsis *CN*. *CI*. *CN* & quarta *BC* ex *B*. ad plagam contrariam aequalis *CN*. locatae ex *B*. ad partem adversus *A*. atque connectantur *CN*. *QN*. *CN*. *CN* producanturque ad circuli circumferentiam in *M*. & erunt interceptae inter cavam circuli peripheriam, & diametrum *BA*. rectae tres *CM*. *QM*. *CM*. quarum *QM*. est radius; atque recta una *CM*. inter convexam peripheriam. & eandem

FIG. XIV. & VIII.

dia-

diametrum aequales singulae radio circuli dati. Id enim positum est. Et tertia $BC$ ex $B$. versus $A$ accepta incidet extra circulum; ita enim una intus quadrantem $BQP$. aequalis radio; & una intus $AQP$. radio quoque aequalis; nempe ipse radius $QM$. (*Lemm. II.*) erit locata.

Quod est primum.

FIG XIV. Est diameter secunda $BD$. hyperbolis $= 2d$. atque illius parameter $= \frac{d}{2}$. sed $EF$ diameter prima est media Geometrica inter $2d$. & $\frac{d}{2}$. quare erit $EF = d$. Et $QE = \frac{d}{2}$. Agatur $EL$. parallela $RIV$ occurrens $AI$ in $L$. remanebit $LA$ extra $IL$; & vertex $A$ parabolae subinde manebit supra verticem $E$ hyperbolis. Quae patent.

Inde necessario parabola, & duae hyperbolae semper in quatuor punctis mutuo convenient: & quatuor adsequemur radices aequationis. Quod erat secundum. Et indicium non adest radicum aequationis impossibilium [*per algorith.*] quod supra (*schol. proposit. V.*) ostensum est.

## PROPOSITIO VII.

FIG.XV. Sit nunc datum punctum $N$ in circuli $ADI$ circumferentia ita ut ordinata ex illo ducta $NO$ ad diametrum positione datam $BA$. cadat in circuli centrum $O$. Et quaeratur intercepta $CM$. uti supra [*proposit. I.*] aequalis datae $P$. Similis erit solutio. Nam sit $CM$. quaesita $P$. & ordinetur $MP$. dicaturque $BC$. ignota $x$. Erit $AC = a - x$; retentis iisdem denominationibus; quae in praecedentibus (*proposit. I.*). & $OC = BO - BC$. erit $= \frac{a}{2} - x$. atque etiam erit $CN = \frac{ax - xx}{b}$. Sed est $CN$. $NO$ :: $CM$. $MP$; scilicet $\frac{ax - xx}{b}$. $\frac{a}{2}$ :: $b$. $MP = \frac{abb}{2ax - 2xx}$.

Est.

Estque $NO . OC :: MP . PC.$ quare erit $\frac{a}{2} . \frac{a}{2} - x ::$ $\frac{abb}{2ax - 2xx}$. $PC = \frac{abb - 2bbx}{2ax - 2xx}$. atqui est sane $MC^2 = MP^2 + OC^2$. quare erit $bb = \frac{aab^4 + aab^4 - 4ab^4x + 4b^4xx}{4aaxx - 8ax^3 + 4x^4}$. Et performetur aequatio; quae proveniet $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + abbx - \frac{aabb}{2} = 0$.

Construetur autem simili quoque ratione, ac praecedentes compositae fuerunt aequationes.

Adsumatur enim locus parabolicus $ax - xx = by$. Hinc erit $aaxx - 2ax^3 + x^4 = bbyy$. Quare si in sede $aaxx - 2ax^3 + x^4$ aequationis inventae reponatur eius aequalitas $bbyy$; extabit aequatio $yy - xx + ax - \frac{aa}{2} = 0$. Itaque sit $AI = \frac{aa}{4b}$. Et vertice $A$. dismetro $AIS$. parametro $b$. describatur parabola $KAO$. Post hac per $I$. agatur $BT$. parallela ordinatis parabolae descriptae. in qua sit $BI = \frac{a}{2}$; seu radio; aut ordinatae $NO$ (*Fig.* XV.); atque sit $IC = BI$. Et diametro secunda $BC$. describatur hyperboles aequilatera $DEL$; cum sua opposita $GFH$. Occurrent mutuo duae curvae; diametri enim illarum sese intersecant intus parabolam (*construction.*). Et occurrent invicem aut in quatuor, aut in duobus punctis. ipsae duae curvae. Potest enim $AI = \frac{aa}{4b}$ esse maior, aut minor (*constru-ction.*) quàm sit $IE = \frac{a}{2}$ semidiameter coniugata hyperbolis. Et nequit esse illi aequalis; cum non sit data $P$. seu $b$. circuli radius. [*hypothes.*]. Hinc vertex $A$. cadere potest aut intra hyperbolem $DEL$. aut extra. Quod in antecedentibus pro aliis casibus etiam ostenditur (*prop. II.*)

FIG. XVI.

FIG. XVI. & XVII.

M Non

Non adest conditio non semel memorata (*proposit. I.*) radicis fictitiae. Nam $\frac{3}{2}aa - aa + bb = \frac{1}{2}aa + bb$. quantitas est positiva. itemque quantitas positiva est $\frac{3}{8}aab^4 + \frac{a^4bb}{2} - \frac{aab4}{2}$; cum sit sola $\frac{a^4bb}{2} - \frac{aab4}{2}$ (*hypoth.*) quantitas positiva. Hinc nequaquam discordant, quae de iis radicibus in aequationibus quarti gradus demonstrat algorithmus. atque tres in inventa aequatione sunt radices verae; una falsa (*per eundem*). Ergo si quatuor sint curvarum concursus; tales radices aequationis erunt. Termini autem eiusdem aequationis non sunt omnes positivi: & non consecutio invenitur signorum +; & —. habet enim tertius & quartus signum +. Igitur (*per algorith.*) radices aequationis erunt verae cum falsis commixtae. Inde si duae sunt interfectiones curvarum; radix una vera erit, altera falsa.

Nunc sint interfectionum puncta $P$. ex quibus punctis demittantur ordinatae $PM$. ad parabolam. atque ad diametrum secundam hyperbolis ordinatae $PN$. Sunt $CN$. ex $C$. versus $B$. $+x$. & $PN$. ex $P$. versus $BCT$. sunt $+y$. Inde in locis oppositis fient illae $-x$. & istae $-y$. Atque $CN$. erunt radices aequationis inventae; valoresque ignotae $x$. Nam Parabola quidem $KAO$. locus erit novus inductus parabolicus $ax - xx = by$. quod pluries antea demonstratum est. atqui propter hyperbolem habetur

FIG. XVI. & XVII.

$PN^2 = BI^2 + NI^2 = BI^2 + \overline{CI - CN}^2$; sive $= BI^2 + \overline{CN - CI}^2$ aut $= BI^2 + \overline{CI + CN}^2$. quare erit $yy = \frac{aa}{4} + xx - ax + \frac{aa}{4}$. Et inde efficietur $yy - xx + ax - \frac{aa}{2} = 0$. quae hyperboles erat aequilatera. Sed sunt eaedem $x$. & eaedem $y$. in utroque loco. Igitur removeatur $yy$; & eius aequalitas (*per parabolam*) subiiciatur $\frac{aaxx}{bb} - \frac{2ax^3}{bb} + \frac{x^4}{bb}$. Et restitutam habebimus

com-

compertam aequationem $x^4 - 2ax^3 + aaxx - bbxx + abbx$
$- \frac{aabb}{2}$. quam construere oportebat.

Accipiantur nunc super diametro positione data *BA*. circuli dati *ADI*. cuius centrum *O*. tres *BC*. *BO*. *BC*. ex *B*. versus *A*. & quarta *BC* in oppositione; si quatuor sint curvarum intersectiones; si vero duae sint intersectiones; sumantur duae *BC*. una ex *B*. versus *A*. altera aversa ipsi *A*. eo plane ordine; quemadmodum constitutum supra fuit [*proposit. I. in constructione*]. Et iungantur *CN*. eruntque; protractis *NC*. ad peripheriam in *M*; comprehensae *CM*. inter diametrum datam *AB*. & ipsam peripheriam aequales singulae eidem rectae datae *P*. seu *b*. Id enim positum est. Atque ad circuli datam diametrum *BA*. ducatur alia diameter *QON*. ad normam in *O*. Et; si quatuor sint intersectiones duarum Curvarum; tunc trium rectarum *BC*. acceptarum ex *B*. ad plagam *A*. in ipsa *BA*. una incidet supra; & una infra, *NOQ*. atque tertia extra circulum. Ita enim una *CM* tantum intus quadrantem circuli *BOQ*. includetur aequalis datae; & una eidem aequalis intus quadrantem *AOQ*. (*Lemm. II.*) Et quae *CM* intus circulum erunt; pertinebunt ad cavum illius; quae vero duae *CM*. extra circulum; pertinebunt ad convexum. sive quatuor sint, sive duae *BC*. & inde quatuor sint, sive duae *CM*.

FIG. XVIII. XVI. & XVII.

FIG. XVIII.

S C H O L I V M.

FIG. XVI. & XVII.

Nequaquam; uti monebatur; erit $AI = EI$. quare curvarum vertices convenire minime poterunt. Sed erit *AI* aut maior, aut minor *EI* (*ut in propositione*). Quoniam si *AI* foret $= EI$; esset $\frac{aa}{4b} = \frac{a}{2}$. Hinc $\frac{aa}{4} = \frac{ab}{2}$. & $\frac{a}{2} = b$. Quod impossibile; esset enim data *P*. aequalis radio circuli dati. Resistit autem hypothesis.

## PROPOSITIO VIII.

FIG. XV. SInt eadem; quae antea. Sed quaeratur de recta *P*. intercepta inter diametrum circuli, & circumferentiam, quae obveniat aequalis radio circuli. Similis equidem erit solutio. Profecto nuper inventa aequatio evadet $x^4 - 2ax^3 + \frac{3}{4}aaxx + \frac{a^3x}{4} - \frac{a^4}{8} = 0$. Haec ipsa aequatio non est in sua propria sede locata. Etenim postremus terminus $-\frac{a^4}{8}$. habet divisorem $+\frac{a}{2}$. qui metitur $-\frac{a^4}{8}$ per $-\frac{a^3}{4}$. Et ipsa aequatio plane dividitur per $x - \frac{a}{2} = 0$. & relinquitur $x^3 - \frac{3axx}{2} + \frac{a^3}{4} = 0$. quae inferiùs etiam deprimitur per $x - \frac{a}{2} = 0$. Et remanet $xx - ax - \frac{aa}{2} = 0$. In sua autem sede haec insidet aequatio; & radices habet duas; positivam unam; & alteram negativam; nempe $\mp \sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{aa}{2}$. Igitur inventa aequatio est primi gradus; sed cum provenerit quarti gradus; duas habet radices rationales positivas $+\frac{a}{2}$, unamquamque aequalem radio circuli dati; & duas irrationales, unam positivam; aliamque negativam. Et singulae fuerunt $x$. cuius illae exponunt valorem. talesque fuerunt radices per nuper effectam inventionem illarum. atque tales illas ostendit consecutio signorum $+$; aut $-$. iuxta algorithmum.

FIG. XVII. Itaque accipiatur supra diametro *BA*. Circuli dati; super qua fuerunt ignotae $x$; seu *BC* [*proposit. I.*] radius *BO*. Et iuncta est *ON*; nempe circuli radius; seu ordinata ex *N*. dato puncto supra

pra peripheria ( *hypothesi* ). Igitur producatur $ON$. ad circumferentiam in $Q$. deinde ex $B$. ad plagam contra $A$. fiat $BC = - \sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$. atque ex eodem $B$. in plaga versus $A$. fiat $BC = + \sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$. & cadet haec $BC$. infra centrum $O$. circuli; seu infra diametrum $NOQ$. & quidem extra Circulum; est enim $+ \sqrt{\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$ maior diametro Circuli: atq; iungantur $C$. & datum punctum $N$. eruntq; $OQ$. atque $CM$ rectae quaesitae aequales radio. Id enim positum est. Et radices duae aequationis inventae aequales singulae ipsi $+ \frac{a}{2}$. exponentur ab eadem $BO$. sunt enim cum eodem signo omnino aequales; aliaeque duae exponentur ab ipsis duabus determinatis $BC$. Atque $OQ$ spectabit circulum cavum. Sed duae $CM$. proficiscentes ambae à punctis $C$. acceptis ( *construct.* ) extra circulum; & una quidem à $C$. ad plagam ex $B$. contrariam $A$. altera à $C$. ad plagam ex $B$. versus $A$; pertinebunt ad circulum convexum.

## PROBLEMA X. GEOMETRICVM.

### DE SOLIDO COCHLEARI.

### L E M M A I.

QVantitas Differentialis iuxta Algebricam analysim infinitè minorum potest infinita habere Integralia; non enim differentiae minimae $\mp dx$ est sola Integralis quantitas $\mp x$; verum etiam $\mp x \mp m$. Et $m$ quasvis cognitas indicat magnitudines; & numero etiam infinitas. Hinc inventa quantitas Integralis non semper satisfacit problemati; sed oportet ut quaedam data, & nota

quan-

quantitas ipsi Integrali addatur; aut ab illa subducatur. Quod in dicta algebra infinitè parvorum, ut rectè animadvertatur, vulgo iussum semper fuit.

. Exploratum aliquando est; quaenam sit quantitas addenda, aut demenda; aliquando minimè est. Si perspectum est; facilis erit actus; & inferiùs etiam id ostendetur exemplo parabolae. Si non est perspectum; eximius prae omnibus Geometra analystes Io. Bernoullius in fine Lectionis VIII. Mathematicae de methodo Integralium tomo operum III. modum agendi praebet exemplo firmatum; scilicet; spatium; cuius Integralis inventa est; poni aequale nihilo: & tunc; si Integralis quantitas quoque plane evanescit: nihil addendum esse, nihil auferendum ipsi Integrali; si vero quantitas aliqua adhuc restat positiva; esse illam ex aliis Integralibus subtrahendam; si autem negativa; esse iisdem addendam. Haec Bernoullius.

Verum aliquando spatii consideratio usui esse potest; praecipuè cum spatium aliquod constituit quaesitam summam Differentialis; nempe integrat; uti in hac doctrina dicitur; quantitatem Differentialem; cuius non accipitur, aut accipi nequit expositio algebrica Integralis; at aliquando ipsa spatii consideratio locum habere non potest; vel non est necessaria. Quapropter generatim; si minus innotescat; quae quantitas addenda sit Integrali; quaeve de illa detrahenda; fiat ignota abscissa; uti $x$; aequalis nihilo; & si nil reliquum sit; argumentum id erit, nil esse addendum, & auferendum Integrali; si autem relinquatur quicquam; est illud Integrali adiiciendum; si sit negativum; sed auferendum, si positivum. Demonstratur.

TAB. IX. PROBL. X FIG. I. Quoniam sit semiparabola $ABC$. cuius diameter $AH$; quae sit axis facilitatis caussa. Et vertex sit $A$. parameter $AL$. sit in $AH$. portio data $AD$, ad quam ordinata parabolae sit $DP$. quae erit data. Originem abscissae non habeant quidem in $A$. sed in $D$. Et sint ex $D$ versus $H = + x$. Ordinatae autem tendentes ex $AH$ axi versus crus $AC$. parabolae sint $+ y$. Dicantur datae $AD.b$. & $DP.a$. atque data etiam $AB$ sit $= c$. Et $BC$ basis semiparaboale

bolae datae sit $= m$. Tandem parameter dicatur $p$. Erit aequatio curvae $yy = bp + px$. cùm sit abscissa parabolae $= b + x$. Sumantur nunc infra $PD$ in parabola duae infinitè proximae $NM$. $nm$. atque ex $N$. agatur $NO$ parallela $AH$. occurrens $nm$. in $O$. Est quidem $AM = b + x$. Sed differentia eius minima $Mm$. est $dx$. eadem plane, ac si abscissae forent simplices $x$. cum origine in $A$.

Elementum areae semiparabolae est minimum trapetium $nNMmn = y \cdot dx$. atqui est $2y \cdot dy = p \cdot dx$. Vnde $dx = \frac{2y}{p} \cdot dy$. quare Elementum erit $\frac{2yy}{p} \cdot dy$. Cuius Integrale est $\frac{2y^3}{3p} = \frac{2bp + 2px}{3p} \times \sqrt{pb + px}$. Sed est in $B$. ipsa abscissa $b + x = AB = c$. Et ordinata $y$. fit $= BC = m$. Quare Integrale $\frac{2bp + px}{3p} \times \sqrt{pb + px}$ erit in $B. = \frac{2pc}{3p} \sqrt{cp} = $ (*ob parabolam*) $\frac{2}{3} cm$. quae tota area est semiparabolica $ABC$. Verùm si accipiantur in eadem parabola duae infinitè proxime $NM$. $nm$. supra $PD$. & eadem ibi fiant; erit spatium semiparabolicum $ADP$. eadem argumentatione; cum locus parabolicus $yy = bp + px$. ubique insidat in curva; aequale $\frac{2}{3} ab$. Ergo habebitur & totum spatium semiparabolicum $ACB$; & pars eius à vertice sumpta $ADP$. & tandem etiam segmentum illius $DBCP$. Etenim est illud $\frac{2}{3} cm - \frac{2}{3} ab$. Si nempe $\frac{2}{3} ab$. detrahatur ex $\frac{2}{3} cm$.

FIG. EADEM.

Haec ita sane eveniunt; quoniam exploratum est; quae sit origo abscissarum: & descripta existit Figura: & reliqua data sunt. Sit vero proposita sola Integralis quantitas $\frac{2bp + 2px}{3p} \times \sqrt{pb + px}$; & aliud quippiam non detur: ignoreturque origo abscissarum. Hinc oportet perquirere (*per dicta initio*) quid addendum, auferendumve Integrali sit, ut satisfiat quaestioni; cum ipsius differentialis $dx$. non sit; uti initio dicebatur,

batur, ſola Integralis $x$. ſed $x$; & aliae notae quantitates. Igitur; ſicuti propoſitum eſt; efficiatur $x$. & termini; ubi adſunt $x$. efficiantur nihilum; ſive $= 0$. Et ſi nil reſtat; erit ipſa ſola Integralis $\frac{\overline{2bp + px}}{3p} \sqrt{bp + px}$; quae eſt retinenda. Quod ſi aliquid reliquum erit; tunc debet illud deduci ex eadem Integrali; ſi eſt poſitivum; ſcilicet affectum ſigno $+$; aut illi addi; ſi ſit negativum; nempe affectum ſigno $-$. Sive, quod unum, idemque eſt; debet illud ſemper detrahi ex $\frac{\overline{2bp + 2px}}{3p} \sqrt{pb + px}$. Etenim additio quantitatis negativae conſtituit apotomen in arithmeticis, & algebricis; nimirum reciſionem. Et quod ſit adſumendum eſt ad quaeſtionem.

Igitur efficiatur $x$. terminique; ubi adſunt $x$. efficiantur $= 0$. Et propoſita ſola integralis $\frac{\overline{2bp + 2px}}{3p} \sqrt{pb + px}$; fiet $\frac{2b}{3} \sqrt{pb}$.

Quare Integralis retinenda eſt $\frac{\overline{2bp + 2px}}{3p} \sqrt{pb + px} - \frac{2b}{3} \sqrt{pb}$.

Quae ſatisfacit quaeſtioni: & eſt ea, de qua agitur. Pateſcat enim area parabolica; quae continetur in illa ſola propoſita Integrali; & de qua area reipſa peragitur & reliqua cum origine abſciſſarum noſcantur; quae ſint; uti hic ſuperius. atque erit $\frac{\overline{2bp + 2px}}{3p}$ $\sqrt{pb + px} - \frac{2b}{3} \sqrt{pb}$ determinata Integralis in $B. = \frac{2}{3} cm - \frac{2}{3} ab$.

Quae area profecto quaeritur; & qualis plane ſuperiùs inventa fuit; ſcilicet area $DBCP$. & ſatisfacit quaeſtioni. Ergo recte propoſitum, & generatim demonſtratum ſic eſt, quod dicebatur. Et ita ſemper. Nam ſane continentur ſemper in eiuſmodi Integralibus dimenſiones ſpatiorum, ſive ſolidorum; aut aliquid, quod ad illas revocatur. Sicuti perimetri parabolae cubicae ſecundae rectificatio redigitur ad parabolae Apollonianae quadraturam. Sed modus generalis tradendus erat. Igitur quaeritur

FIG. EADEM.

ſolum

solum segmentum semiparabolicum $DBCP$. quod est $= \frac{2cm}{3} - \frac{2ab}{3}$.

## COROLLARIUM.

I. Hinc; etiamsi data, & cognita sit Figura; de qua agitur; & reliqua etiam perspecta; sed sola origo abscissarum (quae abscissae in his ponuntur semper adpellatae $x$.) varia sit, & minimè data; tamen efficienda quoque est $x = 0$. & è medio Integralis indeterminatae tollendi sunt termini, ubi adest $x$. Nam tunc [*ex dictis*] semper, an differentiae minimae $dx$. sit Integralis sola $x$. num verò $x$. sed addita, aut detracta alia cognita magnitudine; anceps. Ergo per propositionem patet, quod dicitur.

II. Colligitur etiam, poni posse ignotam $x$. aequalem nihilo non solùm in Integrali quantitate indeterminata; sicuti explicatum est; verùm etiam in ipsa Differentiali: & inde tollendos esse ex illa terminos; in quibus inest sola differentia minima $dx$. Idem enim est quaerere, an accepta Integralis $x$. sit sola Integralis differentiae minimae $dx$. utrum vero aliarum datarum magnitudinum additarum ipsi $x$; vel ex illa deductarum; ac quaerere, an Differentialis $dx$; priusquam accipiatur eius Integralis; habeat solam Integralem $x$. num vero $x$. & alias magnitudines sibi additas, aut è se ipsa detractas. Id autem efficitur (*per tradita in proposit.*) cum sit $x = 0$.

III. Quae continet propositio ita se habent; quoniam in Elementum quodvis quaesitae cuiusvis dimensionis; aut confectae alterius cuiuscumque quaestionis per Algebram infinitè minimorum init semper differentia minima $dx$. cuius Integralis quantitas esse potest tum sola $x$; cum $x \mp m$. Inde enim haec omnia pendent. Et exploratum id est per ea, quae dicta sunt. Ergo; cum solum ob id fiat $x = 0$; aut $dx = 0$. (*n.* 2.); amovendi ex Integrali; aut Differentiali (*n.* 2.) soli termini sunt, ubi comperitur $x$; non quidem $x$. ad alias potestates evecta; qualis $x^2$. aut

$x^3$. & $x^4$. Et ita de reliquis; atque ubi comperitur [ *n.* 2.] ſola differentia minima $dx$. non vero ducta in $x$. aut in alias poteſtates ipſius $x$. qualis $x.dx$, vel $x^2.dx$. Sive $x^3.dx$. Et ita de ceteris. idcirco diximus [ *n.* 2.] tollendos eſſe è Differentiali terminos; ubi adeſt ſola $dx$.

## L E M M A II.

FIG. II. Sit datum triangulum $FAD$ orthogonium in $A$. oportet illud in duo aequalia dividere per rectam $BC$ parallelam lateri $FA$. quod angulo inſiſtit recto $A$.

Dividatur ita in $B$. ex $D$. datum latus $AD$; unde ducenda eſt recta $BC$ quaeſita; ut ſit $DB$. media Geometrica $L$. inter dimidiam rectam lineam $AD$; atque totam eandem $AD$. Agatur ex $B$. parallela $BC$ ipſi $FA$. occurrens $FD$. in $C$, Et erit datum triangulum $FAD$. diſpertitum in trapetium $FABCF$; & triangulum $CBD$. invicem aequalia à recta $BC$ parallela lateri $FA$.

Etenim; cum ſit $DB.BC :: DA.AF$; & triangulum $CBD$. ſit aequale $\frac{CB \times BD}{2}$; erit ipſum idem triang. $CBD$. aequale (*per fabricam*) quartae parti rectanguli $FA \times AD$. cuius rectanguli dimidio eſt aequale totum triangulum $FAD$. Igitur quod reſtat trapetium $FCBA$; ſi a triangulo toto $FAD$. tollatur triangulum $CBD$; erit altera quarta pars rectanguli $FA$ in $AD$. & inde aequale triangulo $CBD$. Ergo erit datum triangulum $FAD$. diſpertitum in duo aequalia; videlicet in trapetium $FCBA$. & in triangulum $CBD$. à recta $BC$ parallela lateri $FA$. Q. E. F.

## D E F I N I T I O.

FIG. III. Sit Rectangulum $ABDC$. cuius lateri $CD$. adhaereat Figura quaevis plena $EDF$. Exiſtentes ambae Figurae in eodem ſemper plano revolvantur motu aequabili, & tempore eodem circa fixum axim $AB$. Interea Figura $EDF$ moveatur altero motu

pro-

progreſſivo ſupra latus *CD*. in dicta revolutione; donec converſio tota perficiatur illuc deſinens; unde coepta eſt; Solidum genitum *Cochlea* adpellatur.

S C H O L I V M.

Solidi Cochlearis hanc maximè perſpicuam, optimamque definitionem excogitavit Torricellius ſcripto relictam in Commentariolo quodam de Cochlea; ubi nonnulla, ſatis vero bene pauca, atq; ea ſtrictim quidem, ac preſſe de hoc ſolido commentus eſt. Et non ſemper demonſtrationem ſubiungere voluit. Centrum vero gravitatis illius vix in fine, & unius tantùm generis Cochlidis; ſcilicet enatae à triangulo adhaerente lateri Figurae revolutae ſine ulla demonſtratione commemorat. Nos ipſam eandem definitionem ſolam cetera omnia noſtra facientes recepimus. Et Torricellius Geometria infinitè minimorum certo non uſus fuit. Dictus Commentariolus operibus evulgatis Torricellii ad finem adiectus eſt. Vir magnae exiſtimationis Paſchalius in quibusdam in lucem emiſſis Epiſtolis Mathematicis ad varios ſcriptis nomine ſubdititio Dettonvillii; ut mihi narratum eſt; litteris etiam prodidit de Cochlea in Epiſtola ad Sluzium: ſed quàm breviſſime ſcripſit; ſolaſque paucas propoſitiones protulit ſine demonſtrationibus; quas aut praetermittit; aut ex alio Commentario a ſe compoſito de Arcubus Circulorum, cumque Epiſtolis illis in lucem edito confectari illas enunciat. Neque Dettonvillius Geometriam infinitè minimorum ad ſua demonſtranda adhibuit. Et egregia definitio Cochleae Torricelliana multo anteferenda eſt definitioni Dettonvillii. Geometras alios de Cochlea agentes nos non vidimus: & etiam ignoramus.

P R O P O S I T I O I.

Sit rectangulum *ABDC*. & Figura alia Plana adhaerens lateri *CD*. ſit triangulum *EDF*. orthogonium in *D*. cuius quidem FIG. IV.

latus $ED$. sit in $CD$. atque revolvantur ambae Figurae circa latus fixum $AB$; prorepatque triangulum $EDF$. eodem tempore motu suo proprio supra $CD$. donec tota perficiatur conversio. (*defi- nit.*) Quaeritur Cochlea per revolutionem generata.

Agantur ordinatae communes rectanguli, & trianguli duae $MON$. $mon$. infinitè proximae, & parallelae quidem ipsi $BDF$. Itaq; erit $MO$. ordinata rectanguli; & $ON$ trianguli. Dicantur datae $BDF$. $r$. $BD$. $b$. $ED$. $p$. $DF$. $a$. Sed denominentur ignotae, & mutabiles $EO$. $x$. atque $MON$. $y$. Erit $Oo$. differentia minima $dx$. Sit Elementum solidi minimus cylinder $MmnN$. ac si in revolutione triangulum $EDF$. non ferretur motu suo progressionis supra $CD$. atq; si dicatur $c$. peripheria descripta in revolutione à dato radio $BDF$ sive $r$; erit peripheria descripta in eadem conversione à radio vario $MN$. aequalis $\frac{cy}{r}$; & circulus basis cylindruli erit aequalis $\frac{cyy}{2r}$. Est vero $Oo = dx$. altitudo eiusdem minimi cylindri. Ergo erit Elementum $MmnN = \frac{cyy.dx}{2r}$.

Sed est $ED.DF :: EO.ON$, nempe $p.a :: x.y - b$. Vnde erit $ax = py - pb$. & $y = \frac{ax + pb}{p}$. atque $yy = \frac{aaxx + 2pbax + ppbb}{pp}$. Igitur si in Elemento loco $yy$ sufficiatur hic eius valor; erit illud $= \frac{caaxx.dx}{2rpp} + \frac{capbxx.dx}{rpp}$ $+ \frac{cbb.dx}{2r}$. Et summa, seu Integrale erit $\frac{caax^3}{6rpp} + \frac{capbxx}{2rpp}$ $+ \frac{cbbx}{2r}$. atqui ob motum progressivum Figurae $EDF$ supra latus $CD$. Origo abscissarum $x$. in $E$. non quidem data est; sed varia est, & mutabilis. Ergo (*corollar. Lemm. I. n.* I. *&* III.) efficiatur $x = 0$; & ex Integrali invento tollatur terminus $\frac{cbbx}{2r}$.

Et

Et erit illud $\frac{caax^3}{6rpp} + \frac{cabxx}{2rp}$. Sed fit in $D$. ignota $x$. aequalis $p$. quare quaesitum solidum erit $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$.

Sit hyperboles $AE$, cuius latus rectum $BD = \frac{2ba}{p}$. Et sumantur quidem eaedem rectae lineae; quae in Cochlea; eodemque modo denominatae. Latus vero transversum, seu axis $CA$. sit $= \frac{2bp}{a}$. Item sit $AF$ in axi producto intus curvam $= p = ED$. Figurae Cochleae. Ex $F$ ordinetur $FE$. ad curvam. Atque ductae sint in hyperbole infinitè proximae ordinatae $MN$ $mn$. sunt quidem abscissae $AN.x$. & ordinatae $MN.y$. Tandem agatur $MO$. parallela $AF$ secans $mn$. in $O$. Nunc revoluta curva $AEF$. circa fixam $AF$. generet conoidem hyperbolicam $EAH$. Cuius altitudo $AF$. Itaque Elementum dictae Conoidis erit minimus Cylinder $MOnN = \frac{cyy.bx}{2r}$. Ostenditur uti hic superiùs in Cochlea descripta. Sed ob hyperbolem est $yy. \frac{2bpx + axx}{a} :: \frac{2ba}{p}. \frac{2bp}{a} :: aa.pp$. Quare erit $yy = \frac{2abpx + aaxx.}{pp}$ Substituatur in Elemento vice $yy$. haec illius aequalitas. Et erit illud $= \frac{cabpx.dx}{rpp} + \frac{caaxx.dx}{2rpp}$. Et Integrale indefinitum erit $\frac{cabxx}{2rp} + \frac{caax^3}{6rpp}$, atq; determinatum fiet $= \frac{cabp}{2r} + \frac{caap}{6r}$; cum $x$. fiat in $F$, aequalis $p$. quod idem plane solidum est, ac Cochlea inventa. Igitur erit ipsa Cochlea aequalis Conoidi hyperbolicae; cuius altitudo $ED$. latus rectum quarta Geometrica ad $DF$. $DE$. & duplam $BD$. latus vero transversum quarta Geometrica ad $DE$. $DF$. & duplam pariter $BD$.

FIG. V.

FIG. IV. & V.

FIG. IV.

CO-

## COROLLARIUM.

FIG. IV. Idem proveniet si triangulum orthogonium $EDF$. fuerit Isosceles. Quoniam erit tunc $p = a$. Et Cochlea fiet $\frac{ca^3}{6r} + \frac{cbaa}{2r}$. Igitur latus transversum $CA$ hyperbolis fit $2b$. Et hyperboles ipsa fit aequilatera. Itaque erit $yy = 2bx + xx$. atque Elementum Conoidis hyperbolicae habebitur $\frac{cbx.dx}{r} + \frac{cxx.dx}{2r}$. Cuius summa erit $\frac{cbxx}{2r} + \frac{cx^3}{6r} = \frac{cbaa}{2r} + \frac{ca^3}{6r}$ in puncto $F$. Quae Cochlea fuit inventa.

FIG. V.

## PROPOSITIO II.

FIG. VI. SInt omnia quae antea. Sed Figura Genitrix $CABFE$. non sit orthogonia in $D$. Quare in revolutione generet Cochleam scalenam. Igitur sit angulus $EDF$ acutus. Et Figura $ABDC$. parallelogrammum sit non rectangulum; triangulumque $EDF$ acutiangulum in $D$. Retineantur eaedem denominationes linearum; quae in praecedenti. Et sit quoque $EO$.abscissa $x$. atque $MN.y$. uti in antecedenti. Ducatur ex $E$ normalis $EI$ supra $DF$. & cadat $EI$. aut intra, aut extra $DF$. ad partes $F$. scilicet; aut sit angulus $EFD$. acutus, aut obtusus; idem eveniet. cadat intra $DF$. ipsa $EI$. quae dicatur $m$. Agatur $OP$.parallela $EI$. secans $mn$ in $P$. Est sane $DE.EI :: oO.OP$, quare erit $p.m :: dx.\frac{mdx}{p}$.

Erit igitur Elementum Cochleae $cyy.\frac{mdx}{p}$. Sed est etiam $ED.DF :: EO.ON$. Et reliqua sicuti in antecedenti. Ergo Integrale erit $\frac{mcaax^3}{6rppp} + \frac{mcabxx}{2rpp} + \frac{mcbbx}{2rp}$. Sed ob motum pro-

gref-

gressivum Figurae $EDE$. esse debet $x = 0$. (*coroll. Lemm. I. n.* I. *&* III.) Quare indeterminatum Integrale erit $\frac{mcaax^3}{6rppp} + \frac{mcabxx}{2rpp}$. Quod in $D$. fiet determinatum $\frac{mcaa}{6r} + \frac{mcab}{2r}$.

Sit hyperboles $EAH$ eadem, quae in praecedenti; cuius tamen diameter non quidem axis sit $CA$. Et producatur $CA$ ad $F$. intus curvam. ita ut sit $AF = ED = p$. In recta linea $AF$. ad datum in illa punctum $F$. sit angulus $AFH$. aequalis angulo $EDF$. Figurae $EDF$. genitae Cochleae. Ex $A$. ducatur $AI$. ad normam supra $FH$. erit triangulum $AFI$. aequale triangulo $DEI$. atque erit $AI$. aequalis $EI. = m$. Igitur ducantur infinitè proximae ordinatae hyperbolis $MN$. $mn$. ad diametrum $CAF$. atque ex $N$ parallela fiat $NP$. ipsi $AI$. occurrens $mo$. in $P$. Erit ob similia triangula $FAI$. $nNP$. ipsa $NP = \frac{mdx}{p}$. Et Elementum Conoidis hyperbolicae prognatae ex revolutione hyperbolis $EAF$. circa fixam $AF$ (est quidem $FE$. ordinata ex $F$. hyperbolis) erit $= \frac{cyy}{2r}. \frac{mdx}{p}$. Sed est ob hyperbolem; sicuti in antecedenti; $yy = \frac{2abpx + aaxx}{pp}$. quare Elementum; facta substitutione pro $yy$; erit $\frac{2cabpx}{2xpp}. \frac{mdx}{p} + \frac{caaxx}{2rpp}. \frac{mdx}{p}$. Et varium Integrale erit $\frac{cabmxx}{2rpp} + \frac{caamx^3}{6rppp}$. quod in $F$. determinabitur $= \frac{cabm}{2r} + \frac{caam}{6r}$. Id autem fuit Cochleae solidum inventum. Igitur Conoidi huic hyperbolicae aequalis est Cochlis illa descripta scalena.

FIG. VII. & VI.

## COROLLARIUM.

Perspicuum est, eadem obvenire, si angulus $EDF$. fuerit obtusus.

FIG. VI.

FIG. VI. rufus. Item si triangulum $EDF$. fuerit Isosceles; aut etiam aequilaterum. Si enim fuerit Isosceles; scilicet fuerit $ED = DF$ fiet $p = a$. Et Cochlea eadem generabitur $\frac{mcaa}{6r} + \frac{mcab}{2r}$.

FIG. VII. in revolutione. Et hyperboles sit eadem sed aequilatera. Nam erit tunc $yy = 2bx + xx$. (*Corollar. praecedentis*) Atque Elementum efficietur $\frac{cbx}{r} \cdot \frac{mdx}{p} + \frac{cxx}{2r} \cdot \frac{mdx}{p}$. Inde Integrale erit $\frac{mcbxx}{2rp} + \frac{mcx^3}{6rp}$. Quod in $F$ fiet $= \frac{mcbp}{2r} + \frac{mcpp}{6r}$.

Sed est $p = a$. Quare integrale erir $\frac{mcba}{2r} + \frac{mcaa}{6r}$. Quae

FIG. VI. Cochlea est hoc casu prognata per conversionem Figurae $CABFE$. circa latus manens $AB$; & progressionem trianguli Isoscelis $EDF$. eodem tempore elati supra $CD$. Idem plane erit si $EDF$. sit triang. aequilaterum.

## PROPOSITIO III.

FIG. VIII. Convertatur Figura $CABFE$ circa latus manens $AB$. donec redeat unde coepit moveri; intereaque triangulum $EDF$. progrediatur supra cui lateri $CD$ rectanguli $ABDC$. advinctum est. Ponatur divisum triangulum $EDF$ in duo aequalia per rectam $GO$ parallelam ex latere trianguli $DF$ ductam alteri lateri $ED$ (*Lemm. II.*) Quaeritur Cochlea descripta à sola Figura $CABGO$. in revolutione.

Ducatur in triangulo $FGO$ ordinata $MN$. parallela $CD$. sive $GO$. & alia infinitè proxima ordinata $mn$. atque ex punctis $N$, $n$. sint duae $NP$. $np$, parallelae $BF$; occurrentes $AB$ in $P$. $p$. sit etiam $OL$. parallela $BF$. occurrens $AB$. in $L$. Inveniatur (*propofit. I.*) Cochlea; quae ex totius Figurae integra revolutione peracta generatur: eritque; retentis pro quantitatibus in hac Figura datis denominationibus quantitatum similium ipsius propositionis primae; solidum Cochleae aequale $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$. Nunc; disper-

dispertito (*hypothesi*) triangulo $FGO$. ab ipsa $GO$ parallela $ED$. in duo aequalia; erit data quidem, & cognita $FG$ [*Lemm. II.*] sumatur quanta esse debet (*Lemm. eodem*); atque dicatur $n$. Sint datae quoque $GO = m$. Et $BG = b$. atque $BF = q$. Sint autem $FM = x$. Et $MN = y$. eritque differentia minima $Mm = dx$. Item circumferentia circuli descripti in revolutione à dato radio $BG$. dicatur $f$. Erit sane superficies Cylindri $LBGO$ designata in eadem revolutione à recta $GO$ aequalis $fm$.

Iam vero frustum solidi generatum à triangulo $FGO$. in revolutione componitur ex infinitis annulis Cylindricis; qui constant ex descriptis à circumactis rectis lineis $MN$. in revolutione superficiebus ductis in altitudines $Mm$. usque ad terminum $GO$. Sunt vero superficies eae cylindrorum $MBPN$. quorum altitudines $MN$. & radii basium sunt $MB = q - x$. sed inventa superficies cylindrica $fm$. est ad dictam superficiem cylindricam descriptam à recta linea $MN$. in ratione composita ex ratione $GO$ ad $MN$. & $GB$ ad $MB$. nempe uti $mb$. ad $qy - yx$. Ergo superficies cylindrica descripta ab ordinata circumacta $MN$. erit $= \frac{fqy - fyx}{b}$. atqui est $FM$. $MN$ :: $FG$. $GO$ :: $FD$. $DE$. Inde $x$. $y$ :: $a$. $p$. quare erit $y = \frac{px}{a}$. Sunt vero datae, & constantes ipsae $f$. $q$. $b$. Itaque praedicta superficies erit $= \frac{fqpx}{ab} - \frac{fpxx}{ab}$. Et minimus annulus cylindricus erit $\frac{fqpx.\,dx}{ab} - \frac{fpxx.\,dx}{ab}$. cuius mutabile Integrale $\frac{fqpxx}{2ab} - \frac{fpx^3}{3ab}$; quod in termino $GO$. fiet constans $\frac{fqpnn}{2ab} - \frac{fpn^3}{3ab} = \frac{3fqpnn - 2fpn^3}{6ab}$. Est vero $3q$. multo maior quàm $2n$. Vnde quantitas positiva est $3qn - 2nn$. & sit aequalis $gg$. Igitur annulus cylindricus habebitur $\frac{fpggn}{6ab}$. sed Cochlea descripta

FIG. VIII.

O à tota

à tota Figura $CABFE$; eſt aequalis $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$ (*prop. I*) Inde Cochleae ſolidum deſcriptum à ſola Figura $CABGOE$ in revolutione erit $\frac{caap}{6r} + \frac{cabn}{2r} - \frac{fpgpn}{6ab}$. Quod fragmen erit Cochleae totius. Et ſcilicet patet, eſſe totam Cochleam $\frac{caap}{6r} + \frac{cabp}{2r}$ maiorem eius parte; nempe annulo cylindrico $\frac{fpggn}{6ab}$. Atque motus progreſſionis ipſius Figurae $EDGO$ delatae ſupra $CD$. ratio quidem habebitur; accipitur enim tota Cochlea generata $CABFE$.

FIG. IX. Sit igitur hyperboles $EAF$. determinata in propoſitione prima; quae converſa circa manentem rectam $AF$. generat ſolidum hyperbolicum aequale Cochleae $\frac{caad}{6r} + \frac{cabn}{2r}$. Et eſt $AF$ (*Fig.* IX *&* VIII.) $= ED = p$. tam in ipſa prima; quàm in hac propoſitione. Eſtque $AFE$ angulus rectus. Nunc accipiatur in ordinata $FE$. portio $FI = \frac{\sqrt{ggn}}{a}$. Iungatur $AI$. Profecto in revolutione hyperbolis $EAF$. circa rectam $AF$. triangulum ſimul revolutum $IAF$. generat conum cum baſi; cuius circumferentia eſt $\frac{f\frac{\sqrt{ggn}}{a}}{b}$. Et ipſa baſis eſt $\frac{fggn}{2ab}$. atque conus eſt $\frac{fpggn}{6ab}$. Ergo

FIG VIII. & IX quaeſita Cochlea deſcripta à Figura $CABGOE$ erit aequalis ſolido hyperbolico excavato $APEIA$. Eſt enim hoc ſolidum

$$= \frac{caap}{6r} + \frac{cabn}{2r} - \frac{fpggn}{6ab} \quad Q.F.O.$$

S c h o l i u m.

Eſt ordinata hyperbolis $FE = \sqrt{2ab + aa}$ (*propoſit. pri-*

FIG. IX. *ma*) Hinc ſi obveniat $\frac{\sqrt{ggn}}{a}$ aequalis $\sqrt{2ab + aa}$. punctum $I$.

in-

incidet in $E$. Iungatur recta $AE$: atque; si revoluta sit Figura $EAF$. circa $AF$, erit Cochlea aequalis hyperboli excavatae $APEA$.

Manifestum, est idem esse huius propositionis problema cum illo; quo Cochlea quaeratur, quae gignitur à dato rectangulo $ABDC$, revoluto una cum adnexo trapetio $DEOG$. circa fixum latus $AB$. intereà dum promotum trapetium sit tempore eodem motu suo proprio super latus alterum $DC$. FIG. VIII.

## PROPOSITIO IV.

Sint omnia, quae in Propositione I. & eadem Figura Quarta. Quaeritur genitae Cochleae centrum gravitatis.

Liquet sane, à Plano perducto per axim $AB$ solidi; qui axis est fixum latus; circa quod tota Figura revolvitur; donec redeat; unde coepit moveri; dividi Cochleam in duo aequalia; atque id ipsum Planum dispertiri in duo quoque aequalia ab axi $AB$. [ *per generationem solidi* ]. Igitur centrum gravitatis manebit in recta $AB$. Et suspensio solidi poni debet effecta per filum $AB$. pertransiens per centrum. Sit effecta per $AB$. ex puncto $A$. Nunc ducatur $EI$ parallela $EDF$. occurrens $AB$. in $I$. Datur $CE$. dari enim debet Figurae $EDF$; quaecumque ea sit; in tota Figura $CABDFE$. positus supra latus $CD$; ex quo positu moveri duplici motu incipiat ipsa $EDF$. & communi conversionis circa $AB$. cum rectangulo $ACDB$. & proprio; quo praeterlabitur supra $CD$. Inde data erit $CE = AI$. quae sit $= q$.

Erit ( *eadem proposit. I.* ) habita ratione dicti motus proprii trianguli $EDF$. progredientis supra $CD$. elementum solidi; & inde minimum illius pondus aequale $\frac{caaxx.\,dx}{2rpp} + \frac{capbx\ dx}{rpp}$. [ *Corollar. Lemmatis I. n. 2.* ] cuius Integrale indefinitum est $= \frac{caax^3}{6rpp} + \frac{capbxx}{2rpp} = \frac{caax^3 + 3capbxx}{6rpp}$. Sed est $CO =$

$AM = q + x$. atque eſt eadem $AM$. diſtantia ſemper minimorum ponderum ſolidi connitentium in ſuſpenſionem $A$. & quidem varia. Ergo productum ex $q + x$ in dictum minimum pondus erit aequale elemento momentorum ponderum eorumdem minimorum. Eſt vero id productum $= \frac{caaqxx.dx}{2rpp} + \frac{caax^3.dx}{2rpp} + \frac{capbqx.dx}{rpp} + \frac{capbx^2.dx}{rpp}$. Cuius indefinitum Integrale eſt $= \frac{caaqx^3}{6rpp} + \frac{caax^4}{8rpp} + \frac{capbqxx}{2rpp} + \frac{capbx^3}{3rpp} = \frac{48caaqx^3 + 36caax^4 + 144capbqxx + 96capbx^3}{288rpp}$.

Dividatur nunc Integrale hoc per ſummam indefinitam ponderum ſimplicium $\frac{caax^3 + 3capbxx}{6rpp}$. Et adſequemur centri Gravitatis diſtantiam variam à ſuſpenſione $A$. Itaque erit ea diſtantia $= \frac{48aqx + 36axx + 144pbq + 96pbx}{48ax + 144pb}$. Sed $x = EO = IM$. efficitur in $D$. ſeu $B$. aequalis $p$. Ergo definita diſtantia, & quaeſita centri Gravitatis Cochleae à ſuſpenſione

FIG. IV. $A$. ſuper $AB$ erit $= q + \frac{36ap + 96pb}{48a + 144b} = q + \frac{3ap + 8pb}{4a + 12b}$. quare erit aequalis $AI$. una cum quarta Geometrica poſt $4a + 12b$; & $3a + 8b$; & $p$. Eſt vero haec quarta Geometrica minor quàm $p$; ſeu quàm $ED$. ſive $IB$. Igitur cadet centrum Gravitatis intra $IB$. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO V.

FIG. X. Sint omnia, quae in praecedentibus. Sed ſit rectangulum $EDFG$. quod adiaceat lateri $CD$. & in revolutione motu proprio elatum ſit ſupra ipſum $CD$. Quaeritur Cochlea; quae generatur.

Agantur infinitè proximae $MON$. $mon$. parallelae $BDF$. occu-

currentes $AB$. in $M$. $m$. Et $CD$. in $O$. $o$. Et $GP$ in $N$. $n$. dicantur $BD$. $b$. & $BDF$. $r$. atque $ED$. $p$. Sit vero $DF$. $a$. atque $EO$. $x$. & $ON$. $y$. Erit $Oo$. $dx$. Sed est semper $MN = b + y$. Igitur Elementum solidi iuxta superiora erit $\frac{\overline{cbb + 2cby + cyy} \times dx.}{2r}$ Amovendus autem est terminus $\frac{cbb.dx}{2r}$. propter progressionem Figurae $EDFG$. supra latus $CD$. procedentis; unde varia, & mutabilis est origo $E$ abscissarum $EO$. (*Coroll. Lemm. I. n.* 2.) Ergo Elementum erit $\frac{2cby.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r}$

Atqui $y$ est semper $a$. Et inde elementum erit $\frac{cba.dx}{r} + \frac{caa.dx}{2r}$. Cuius summa $\frac{cbax}{r} + \frac{caax}{2r}$. Sed in $D$. efficitur $x$. aequalis $p$. Igitur quaesita Cochlea, & definita erit $\frac{2cbap + caap}{2r}$.

Et inde erit aequalis Cylindro; cuius altitudo $p$. scilicet $ED$. radius vero basis erit $\sqrt{2ba + aa}$. quae est media inter $a$; seu $DF$. & $a + 2b$. sive $FB + BD$. $Q$. $E$. $I$.

## PROPOSITIO VI.

Sint eadem. Et eadem Figura: Quaeritur centrum Gravitatis. Repetantur quae in propositione IV. initio dicta sunt pro centro Gravitatis Cochleae illius. Deinde erat indefinitum Integrale Elementi, seu minimi ponderis solidi [*proposit. praeced*] $= \frac{2cbax + caax}{2r}$. Producatur $GE$. donec secet $AB$. in $I$. Et sit $CE = AI = q$.

Cum sit $CE = AI = q$; inde erit $AM = q + x$. & suspensio sit (*hypothesi*) in puncto $A$. Ergo Elementum momentorum ponderum solidi minimorum adversus $A$. connitentium erit; cum sit $q + x$ distantia, qua semper distant ea minima pondera à suspensione; aequale $\frac{cbaq.dx}{r} + \frac{cbax.dx}{r} + \frac{caaq.dx}{2r} +$

caax.

$\frac{caax.dx}{2r}$, cuius mutabile Integrale est $\frac{cbaqx}{r} + \frac{cbaxx}{4r} + \frac{caaqx}{2r} + \frac{caaxx}{4r} = \frac{32cbaqx + 8cbaxx + 16caaqx + 8caaxx}{32r}$.

Dividatur hoc Integrale per ponderum simplicium summam variam $\frac{2cbax + caax}{2r}$. Et; cum $x$ fiat in $B$. aequalis $p$. habebitur distantia constans, & definita centri Gravitatis à puncto $A$. aequalis $\frac{32bq + 8bp + 16aq + 8ap}{32b + 16a} = q + \frac{bp + ap}{4b + 2a}$. Hinc erit illa aequalis ipsi $q$. sive $AI$. una cum quarta Geometrica post $4b + 2a$; & $b + a$, & $p$. quae quarta erit quidem minor $p$. Et inde manebit centrum intus $IB$. Q. E. I.

## PROPOSITIO VII.

FIG. XI. Sit rectangulum $RTFE$; cuius latus $TF$. in $C$. & latus $EF$. in $H$. tangat circulus $GLH$. Sit circuli centrum $S$. Et iuncta $HS$. producatur ad circulum in $G$. atque in $G$. tangat quoque eundem circulum recta $ABG$. occurrens rectangulo in $B$. & $A$. Iungatur $CS$. quae producatur; donec secet rectangulum in $D$. Et revolvatur tota Figura circa latus manens $RE$; interea circulus eodem tempore motu proprio progreditur supra latus $TF$. quaeritur Cochlis hac revolutione procreata.

Ducantur infinitè proximae duae $MPQ$. $mpq$. parallelae $RT$. & secantes $RE$ in $M$. $m$. atque $TF$. in $P$. $p$. & ipsum circulum hinc, & hinc à diametro $GH$. in $O$. $o$. atq; in $Q$. $q$. Ponatur $G$. origo abscissarum. Profectò in hac revolutione origo ipsa $G$. abscissarum constans est; & immutabilis; cum non adhaereat lateri $TF$ supra illud insidens; dum circulus duplici motu sursum defertur; & cum circulus area sua sursum non progrediatur per can-

eandem rectam $TF$; supra quam maneat. Igitur; dum Cochlea haec quaeritur; sola ratio ducenda est motus revolutionis circuli $CGLH$. ac si solum ille revolveretur circa manens latus $TF$; & non cum tota Figura circa $RE$. cuius Figurae revolutio circa $RE$. efficitur quidem; sed nil in Cochleae generationem facere potest.

Dicantur nunc $GI.x$. Et $QI.y$. atq; $AB = DC.b$. Et dati circuli radius $CS.r$. Cuius circumferentia denominetur $c$. Est $MPQ = b + r + y$. cuius radii varii circ.lus descriptus in revolutione effecta circa $RE$. erit $= \frac{cbb + crr + cyy + 2cbr + 2cby + 2cry}{2r}$.

Sed est $MO = MP + PI - OI = b + r - y$. Et circulus huius mutabilis radii in eadem revolutione designatus est $= \frac{cbb + crr + cyy + 2cbr - 2cby - 2cry}{2r}$. Subtrahatur haec quantitas, seu hic circulus ab alio; & quod reliquum est $\frac{4cby + 4cry}{2r}$ ductum in $dx$. erit Elementum solidi quaesiti; nempe exorti à solo circulo $CGLH$. in revolutione; illiusque Integrale praebebit illud solidum, sive Cochleam; quae quaeritur; per ea, quae praemissa sunt. Itaque dictum Elementum erit $\frac{4cby\ dx}{2r} + \frac{4cry.dx}{2r}$. atqui est $y$ ob circulum $= \sqrt{2rx - xx}$. Inde Elementum est $\frac{4cb}{2r}\sqrt{2rx - xx}.\,dx + \frac{4cr}{2r}\sqrt{2rx - xx}.\,dx$. Est vero $\sqrt{2rx - xx}.\,dx$. Elementum semisegmenti circuli $GIQ$. Igitur Elementum solidi erit $= \frac{4cb}{2r} \times$ elementum semisegmenti $GIQ$ $+ \frac{4cr}{2r} \times$ elementum semisegmenti $GIQ$, cuius indeterminatum Integrale erit $\frac{4cb}{2r} \times$ semisegment. $GIQ + \frac{4cr}{2r} \times$ semisegment $GIQ$. Est vero semisegmentum $GIQ$ in $II$. aequale semicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$. Quare idem Integrale definitum erit

$\frac{ccb + ccr}{2}$. Et inde quaesita Cochlea erit ad sphaeram circuli genitoris; quae est $\frac{2crr}{3}$; uti circumferentia descripta à radio $DCS$. in revolutione; quae circumferentia est $\frac{cb + cr}{r}$; ad duas tertias partes diametri eiusdem circuli genitoris; nimirum ad $\frac{4r}{3}$. *Q. E. I.*

## PROPOSITIO VIII.

FIG. XI. Sint eadem. itemque sit eadem Figura. quaeritur centrum Gravitatis Cochleae. Repetantur, quae in propositione IV. initio dicta fuere pro centro Gravitatis Cochleae illius. & suspensio est [*hypothesi*] in $R$. Erit (*proposit. praeced.*) Elementum solidi; seu minimum pondus $= \frac{4cb}{2r} \times$ elementum semisegmenti $GIQ$ circuli $+ \frac{4cr}{2r} \times$ elementum semisegm. $GIQ$ circuli. atqui; per ea, quae propositione eadem praecedenti praemissa sunt de huius Cochleae generatione; distantia varia, & mutabilis minimorum ponderum huius solidi à suspensione $R$. est sola sumenda abscissa $GI$. seu $x$. Ergo Element. momentorum ponderum eorumdem adversus $R$. erit $= \frac{4cbx}{2r} \times$ element. semiseg. $GIQ$. $+ \frac{4crx}{2r} \times$ elementum semisegmenti $GIQ$. Cuius Integrale definitum; cum sit $x$. in $H$. aequalis $2r$. & pariter in $H$. sit semisegm. $GIQ$ $=$ semicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$; erit $ccbr + ccrr$. Quod dividatur per summam determinatam simplicium ponderum $\frac{ccb + ccr}{2}$ [*proposit. praeced.*]. Et obtinebitur constans, & definita distantia centri Gravitatis à suspensione $R$. aequalis $2r$. distat igitur centrum

trum gravitatis Cochleae huius ſupra $RE$. à ſuſpenſione $R$. per dati circuli diametrum $GH$. $Q. E. I.$

## PROPOSITIO IX.

Sint quae in Propoſitione VII. Et eadem ſit Figura. Quaeritur Solidum enatum ex revolutione totius Figurae $BALFHLGC$ circa manens latus $AB$ circumactae. Solum igitur motum hunc revolutionis habet circulus $GLHC$. Et non generatur Cochlea. FIG. XI.

Sumatur circulus in revolutione deſcriptus ab incoſtanti radio $MPQ = b + r + y$ ( *propoſit. praeced.* ) ex quo circulo nulla efficienda eſt ſubtractio alterius circuli; uti in ipſa praecedenti. Erit igitur Elementum ſolidi $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{crr.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{2cbr.dx}{2r} + \frac{2cby.dx}{2r} + \frac{2crx.dx}{2r}$. ( *propoſit. ead* ) Cuius Integrale indefinitum; ſi loco $y$ ſubſtituatur $\sqrt{2rx - xx}$; & loco $yy$ ſubdatur $2rx - xx$; erit aequale $\frac{cbbx}{2r} + \frac{crx}{2} + \frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} + cbx + \overline{\frac{cb}{r} + c} \times$ ſemiſegmentum $GIQ$. circuli. atqui in $H$. efficitur $x = 2r$. & ſemiſegmentum fit aequale ſemicirculo $GLH = \frac{cr}{4}$. Quare definitum ſolidum erit $cbb + \frac{5}{3}crr + cbr + \frac{ccb}{4} + \frac{ccr}{4} = \frac{48cbb + 80crr + 48cbr + 12ccb + 12ccr}{48}$.

Adſumatur novus aliquis circulus datus; cuius circumferentia dicatur $p$. & radius $q$. Et inveniatur recta linea $= \sqrt{\frac{48qbb + 80qrr + 48qbr + 12qcb + 12qcr}{8p}}$; quo radio deſcribatur circulus; qui erit aequalis quadrato dimi-

dio eiusdem rectae lineae ducto in $\frac{p}{q}$. Igitur erit aequalis $\frac{48bb + 80rr + 48br + 12cb + 12cr}{16}$. Quare; si hoc adsumpto circulo tanquam basi, & altitudine; quae sit aequalis circumferentiae $c$. circuli in propositione dati describatur conus; erit ille aequalis solido invento. Etenim erit conus aequalis $\frac{48cbb + 80crr + 48cbr + 12ccb + 12ccr}{48}$. Quod fuit solidum inventum.

S C H O L I U M.

Si sint eadem, quae antea; & eadem Figura XI. sed quaeratur solidum à solo circulo $GLHG$ in revolutione prognatum; facile illud determinabitur, cum sit aequale solido invento in propositione, dempto Cylindro; qui à rectangulo $ABFE$ in conversione circa latus fixum $AE$. cum tota Figura revoluto generatur.

P R O P O S I T I O X.

FIG. XII. Sit rectangulum $ABDC$; cuius lateri $BD$. adhaercat semicirculus $FED$. sitque $FD$. diameter supra $BD$. desinens in angulo $D$. rectanguli. Circumagatur tota Figura circa manens latus $AC$. dum semicirculus eodem tempore motu proprio praeter communem provehitur supra $BD$. Quaeritur Cochlis.

Sit $AB = CD = b$. & circuli; cuius est $FED$. semicirculus; radius sit $r$. atque circumferentia $c$. ducantur infinitè proximae $MON$. $mon$. parallelae $AB$. secantes $AC$. in $M$. $m$. & $BD$. in $O$. $o$. atq; semicirculum in $N$. $n$. Deinde abscissae $FO$ sint $= x$. Et ordinatim ad circulum adplicitae $ON$. sint $= y$.

Erit $MON = b + y$. & circulus in revolutione totius Figurae designatus ab inconstanti radio $MON$. erit $\frac{cbb}{2r} + \frac{cyy}{2r}$

+

$+ \frac{2cby}{2r}$. Hinc Elementum solidi foret $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r}$ $+ \frac{cby.dx}{r}$. atqui ob motum progressionis semicirculi supra $BD$ prolati esse debet $\frac{cbb.dx}{2r} = o$. (*Coroll. Lemm. I. n.* 11.) Ergo quaesitae Cochleae Elementum erit $\frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r}$ Est vero $MO$ semper constans, & $= b$. sed $yy$ est (ob circulum) $= 2rx - xx$. atque $y$ est $= \sqrt{2rx - xx}$. Inde Elementum solidi erit $\frac{crx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} - \frac{cb}{r}\sqrt{2rx - 2x}$. Cuius mutabile Integrale erit $\frac{cxx}{2} - \frac{cx^3}{6r} + \frac{cb}{r} \times$ semisegment. $FON$ circuli $= \frac{6rcxx - 2cx^3 + 12cb \times \text{semiseg} \cdot FON.\text{circ.}}{12r}$ Efficitur vero in $D$. ipsa abscissa $x = 2r$. Et semisegmentum $FON$ fit $= \frac{cr}{4}$. Ergo solidum quaesitum erit $= 2crr - \frac{4}{3}crr + \frac{ccb}{4} = \frac{2}{3}crr + \frac{ccb}{4} = \frac{8crr + 3ccb}{12}$. Et adsumatur novus aliquis circulus datus; cuius radius sit $= q$. atque circumferentia sit $= p$. deinde inveniatur quantitas aequalis $\sqrt{\frac{8qrr + 3qcb}{6p}}$. quo radio describatur circulus. Erit is circulus aequalis quadrato dimidio eiusdem quantitatis ducto in $\frac{p}{q}$. Quare erit ipse circulus aequalis $\frac{8rr + 3cb}{12}$. Igitur si basi, quae sit hic idem circulus; & altitudine $= c$. nempe $=$ circumferentiae dati circuli in propositione descriptus sit cylinder; erit cylinder aequalis Solido Cochleae invento. Quoniam erit aequalis $\frac{8crr + 3ccb}{12}$.

*Q. E. I.*

## PROPOSITIO XI.

FIG. XII. Sint quae antea. Et eadem Figura. Ducatur ex $F$ parallela $FI$. ipsi $DC$. fecans $AC$. in $I$. & recolantur, quae in propositione IV. ad centrum Cochleae investigandum praedicta funt. Sitque data $AI$ denominata $m$. Erit distantia indefinita ponderum Cochleae inventae in praecedenti à fuspenfione $A$ (*hypoth.*) $= AIM = m + x$.

Erat (*propofit. X.*) Elementum folidi, feu minimum pondus Cochleae aequale $\frac{ccx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r}\sqrt{2rx - xx}$. $= \frac{crx.\ dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r} \times$ Element. femifegmenti $FON$ circuli. Ducatur hoc minimum pondus in distantiam $m + x$. Et habebitur productum; quod erit Elementum momentorum folidi adverfus fufpenfionem $A$. molientium. Eft vero illud productum $= mcx.dx + cxx.dx - \frac{cmxx.dx}{2r} - \frac{cx^3.dx}{2r} + \frac{cbm}{r}$ $\times$ Element. femifegmenti $FON$ circuli $+ \frac{cbx}{r} \times$ Elementum femifegmenti $FON$ circuli.

Integrale huius Elementi momentorum mutabile eft $\frac{mcxx}{2} + \frac{cx^3}{3} - \frac{cmx^3}{6r} - \frac{cx^4}{8r} + \frac{cbm}{r} \times$ femifegment. $FON + \frac{cbx}{r}$ $\times$ femifegment. $FON = \frac{144mrcxx + 96crx^3 - 48cmx^3 - 36cx^4}{288r}$ $\frac{+ 288cbm \times \text{femifegment. } FON + 288cbx \times \text{femifegment. } FON.}{288r}$

quod dividatur per inconftantem fummam ponderum fimplicium $\frac{6rcxx - 2cx^3 + 2cb \times \text{femifegment. } FON.}{12r}$ (*propofit. X.*) Et praebebit distantiam indefinitam centri Gravitatis Cochleae à fufpen-

ſpenſione $A$. Deinde, cum ſit $x$. in $D$. ſeu $C = 2r$. & ſemiſegment. $FON$ in $D$. ſit $= \frac{cr}{4}$; ſi loco $x$. & ſemiſegmenti $FON$. hae aequalitates ſufficiantur in dicta effecta diviſione; habebitur pro toto ſolido diſtantia quaeſita centri Gravitatis Cochleae inventae, & definita ſupra $AC$. (*eadem Figura*) à ſuſpenſione $A$. $= \frac{192 mcr^3 + 192 cr^4 + 72 bmccr + 144 bccrr}{192 cr^3 + 172 ccbr} = m + \frac{192 r^3 + 144 bcr}{192 rr + 72 bc}$. Erit igitur centrum quaeſitum intus $IC$ (*ead. Fig.*) in qua $IC$. ſumatur ex puncto $I$ verſus $C$ quarta Geometrica poſt $192 rr + 72 bc$; & $192 rr + 144 bc$; & poſt $r$. atqui eſt ea quarta Geometrica maior ſemidiametro $r$. circuli dati. Ergo; ſi agatur ex huius circuli centro $Q$. parallela $QH$. ipſi $CD$; occurrens $AC$. in $H$; manebit centrum intus $HC$. Diſtantia haec inventa centri Gravitatis à ſuſpenſione $A$. mechanicè determinabitur. Etenim dicta quarta Geometrica non habebitur, niſi ſumatur dati circuli in propoſitione circumferentia $c$.

## PROPOSITIO XII.

FIG. XIII.

Sit rectangulum $ABDC$ generans Cochleam cum advincta lateri $BD$. parabola $FDE$. (*definit.*) Quaeritur Cochlis. ducantur duae infinitè proximae $MON$. $mon$ parallelae $CDE$; ſeu $AB$, occurrentes $AC$ in $M$. $m$. & $BD$. in $O$. $o$. atque parabolae perimetro in $N$. $n$. Eſt quidem $FD$. axis parabolae. Cuius parameter dicatur $p$. Et ſit $CD = b$. Et periphéria circuli deſcripti in revolutione à radio dato $CE$. dicatur $c$. atque $CE$. radius denominatus ſit $r$. Dein abſciſſae $FO$ parabolae ſint dictae $x$. atque ordinatae $ON$. $y$. Inde $MON$. erit $= b + y$. Et circulus in revolutione deſcriptus à radio mutabili $MON$. erit $= \frac{cbb}{2r} + \frac{cyy}{2r} + \frac{cby}{r}$. Igitur Elementum ſolidi; ſi parabola

bola motu proprio in revolutione non prorepcret supra $BD$. foret minimus cylinder $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r}$. cuius indefinitum Integrale; cum sit $yy = px$; atque $y = \sqrt{px} = px^{\frac{1}{2}}$ ob parabolam; esset $\frac{cbbx}{2r} + \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r}\, cbpx.^{\frac{3}{2}}$ Ergo ob motum progressionis parabolae; Integrale indefinitum erit $\frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r}\, cbpx^{\frac{3}{2}}$ (*coroll. Lemm. I. n.* I. & III.) $= \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3}\, cbp\sqrt[2]{xxx} = \frac{cpxx}{4r} + \frac{2}{3r} cbpx\sqrt[2]{x} = \frac{3cpxx + 8cbpx\sqrt{x}}{12r}$.

Est vero $x$. si axis $FD$. parabolae dicatur $a$. atque basis $DE$ denominetur $m$; aequalis in $D$. ipsi $a$. Vnde pariter in $D$. est $\sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{\frac{mm}{p}}$. Inveniatur ipsi $\sqrt[2]{\frac{mm}{p}}$. aequalis $\frac{n}{q}$. Ergo quaesitum totum solidum erit $= \frac{cpaa}{4r} + \frac{2cbpan}{3qr} = \frac{3cpqaa + 8cbpan}{12rq}$. Inquiratur recta linea aequalis $\sqrt{\frac{3qpa + 8bpn}{6q}}$ quo radio describatur circulus. Erit is circulus $= \frac{3cqpa + 8cbpn}{12rq}$. Itaque si altitudine $a$; & basi; quae sit circulus ille; constituatur cylinder; erit cylinder aequalis Cochleae huic parabolicae. Nam erit cylinder aequalis $\frac{3cqpaa + 8cbpna}{12rq}$. quae Cochlea fuit inventa. Quod erat primum

EADEM FIG. Invenietur nunc Cochleae centrum. Et mente recolantur, quae in propositione IV. pro centro Gravitatis Cochleae illius antea commonentur. atque è vertice parabolae $F$ (*ead. Fig.* XIII.) ducatur $FI$. aequidistans $CDE$. & occurrens lateri $AC$. rectanguli in $I$. Atque data $AI$. dicatur $l$. Erit Elementum solidi; seu minimum pondus $\frac{cbb.dx}{2r} + \frac{cyy.dx}{2r} + \frac{cby.dx}{r} = \frac{cyy.dx}{2r}$ +

$+ \frac{cby.dx}{r}$. ob motum progreſſionis parabolae, quae eodem tempore revolutionis totius Figurae procedit motu proprio ſupra rectanguli latus $BD$. (*Coroll. Lemm. I. n.* 2.) quare ob parabolam idem Elementum erit $\frac{cpx.dx}{2r} + \frac{cbpx^{\frac{1}{2}}dx}{r}$. Eſt vero diſtantia ponderum ſolidi enitentium adverſus ſuſpenſionem $A$ (*hypotheſi*) aequalis $l + x$. Igitur Elementum momentorum erit $\frac{cplx.dx}{2r} + \frac{cpxx.dx}{2r} + \frac{cbplx^{\frac{1}{2}}dx}{r} + \frac{cbpx^{\frac{3}{2}}dx}{r}$. Cuius indeterminatum Integrale eſt $\frac{cplxx.}{4r} + \frac{cpxxx}{6r} + \frac{2}{3r}cbplx^{\frac{3}{2}}$

$$+ \frac{2}{5r}cbpx^{\frac{5}{2}} = \frac{90cplxx + 60cpx^3 + 240cbplx^{\frac{3}{2}} + 144cbpx^{\frac{5}{2}}}{360r}$$

$$= \frac{90\ cplxx + 60\ cpx^3 + 240\ cbplx\sqrt{x} + 144\ cbpxx\sqrt{x}.}{360r}$$

Dividatur hoc Integrale per variam ſummam ponderum ſimplicium; quae hic ſuperiùs erat $\frac{3cpxx + 8cbpx\sqrt{x}}{12r}$. Et habebitur diſtantia indefinita centri gravitatis à ſuſpenſione $A$, ſcilicet $\frac{90lx + 60xx + 240bl\sqrt{x} + 144bx\sqrt{x}}{90x + 240b\sqrt{x}} = l + \frac{60xx + 144bx\sqrt{x}}{90x + 240b\sqrt{x}}$. Fit vero $x$ in $D$. aequalis $a$. Et $xx = aa$. & eſt $\sqrt{x} = \sqrt{a}$. efficitur autem $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{mm}{p}}$. in eodem puncto $D$. Sed erat ſupra $\sqrt{\frac{mm}{p}} = \frac{n}{q}$. Ergo diſtantia definita centri Gravitatis Cochleae huius parabolicae à ſuſpenſione $A$. erit

$$= l + \frac{60qaa + 144ban}{90qa + 240bn} = l + \frac{30qaa + 72ban}{45qa + 120bn}.$$

Itaque diſtat cetrum Gravitatis Cochleae à puncto $A$, per rectam

ſtam ſupra $AC$. aequalem $AI$ cum quarta Geometria poſt $45qa$ $+120bn$; & $30qa+72bn$; & $a$: quae quarta minor eſt quidem quàm $a$. Et manet centrum intus $IC$. Quod erat ſecundum.

## *Eſame d' una Macchina inventata pel Moto perpetuo.*

TAV. X. Diſegno della Macchina. FIG. I.

Eſſendo io in Firenze l' Anno 1753., nelle vacanze eſtive della Pubblica Accademia Piſana; mi fu ſpontaneamente ragionato il meſe di Luglio, d' una Macchina di Moto perpetuo; acciocchè l' eſaminaſſi; e ne deſſi il mio giudizio; il quale quì eſporrò con deſcriver prima la Macchina; che io non vidi: e neppure vidi il modello; ma ſolamente mi fu quella ſpiegata a voce dall' Autore; e poi me ne fu dal medeſimo recato il diſegno; che è quì nella Figura rappreſentato.

Coſta la Macchina del Peritrochio $DE$; il quale deve eſſere il Mobile perpetuo. E' compoſto $DE$ d' una prima ruota eſteriore $DQE$ moſſa intorno dall altra interiore concentrica $BC$. E ſono ruote amendue dentate. Volgeſi in giro $BC$. e quindi $DQE$. traſportata $BC$ dall' aſſe $AFG$; che paſſa per $A$. centro comune. E vien moſſo $AFG$. dal ſoſpeſovi peſo $X$. nell' eſtremità $F$; eſſendo l' altra eſtremità $G$. del tutto libera. Il medeſimo aſſe $AFG$. agiatamente ſi raggira intorno $A$. perchè ſi poſa via via ſopra gli zoccoletti $z.z.z.$ applicati a tutta la circonferenza interiore $BC$. ad ugual diſtanza; e i quali poi va eſſo medeſimo aſſe nel moto ſormontando. Dunque $FAG$ intorno il punto $A$. s' aggira liberamente; e non ſcorre avanti, e dietro per eſſo $A$.

Giace ſopra la ruota eſteriore $DQE$. il rocchetto $L$. pure den-

dentato. E mentre questa rota si rivolge verso una parte $DQ$. il rocchetto $L$. gira intorno all' opposta $DE$. E' inserito nel rocchetto pel centro $L$. un Asta $MLM$. avente come due cucchiai $M$. $M$. nelle due estremità. Il detto movimento del rocchetto fa, che l'asta $MLM$. si rivolga intorno $L$. e giunta l'asta in $P$. tramanda nel canale $PO$. sorretto dal sostegno P. una palla $Y$. che portava dentro la scodella, o il cucchiaio $M$. La qual palla è uguale al peso $X$. ma il braccio canaliforme $PO$. è più lungo di $AF$ in ragione; siccome si è fatto; di cinque a quattro. Quindi il momento per $PO$. prepondera col momento per $AF$. contro l' ipomochlio $P$. FIG. I.

Arrivata dunque la palla $Y$. all'estremità $O$. del braccio $PO$. s' innalza $AF$. e s' abbassa $PO$. fin dove ritrovando $PO$. un altro inferior canale $TS$. ben sostenuto, e accomodato nella Macchina per la struttura della medesima; vi scarica dentro la palla $Y$. in $o$. Ma perchè $TS$. è inclinato all' orizzonte da $S$. a $T$. la palla scorre da $S$. nel ricetto $T$. del medesimo canale $TS$; dove si ferma, e aspetta, che colà si riconduca l' asta $MLM$. la qual' asta giuntavi prende essa palla col suo cucchiaio $M$; come rappresenta la Figura; e continova la rivoluzione. Già sono due le palle eguali. E l'asta $MLM$. volgendosi intorno ritiene in un cucchiaio $M$. una palla; e nell' altro non ha nulla; ma ritrova la seconda palla ferma; come si è detto; nel ricetto $T$. incavato in modo, che possa col cucchiaio $M$. facilmente innalzarla, e dentro riceverla. FIG. I.

Il canale $PO$. resta prolongato dall' altra parte in altro braccio $PN$. dal di cui estremo $N$. pende il filo $NF$. che s' interfega, con l' asse $GAF$. in $F$. dove è attaccato; siccome si è detto; il peso $X$. FIG. I.

Dipoi vi è un altro scapo $ZPR$. simile a $NPO$. cioè il di cui braccio $PR$. è uguale al braccio $PO$. e il braccio $PZ$. uguale al braccio $PN$. E dall' estremità $Z$. di $PZ$. pende ancora un filo $ZH$. uguale a $NF$. il quale $ZH$. sega pure in $H$. un altr' asse $IAH$. condotto pel medesimo centro $A$. del peritrochio $DE$. similmente

come *GAF*. ed è pure affiffo all'eftremo *H*. altro pefo *X*. uguale all'altro *X*. parimente come queſto *X*. ſta attaccato in *F*. Dunque reſtando ſempre la ſopra mentovata preponderazione; mentre *PO*, s'abbaſſa in *Po*. s'alza la parte *PAFN*. in *PAfn*. e nello ſteſſo tempo s'abbaſſa *PAHZ*. s'alza *PR*. E così ſempre alternando tanto le due Figure *PAFN*, e *PAHZ*; quanto le due braccia *PO*. *PR*. i loro movimenti all'insù, e all'ingiù; ne ſeguirà il Moto perpetuo. Quando ſi dice la Figura *PAFN*; o pure *PAHZ*. s'intende; che ſia immaginata una retta linea *PA*. che congiunga i due punti *A*. e *P*. e ſia formata come una figura quadrilatera *PAFN*. o pure *PAHZ*.

FIG. I.

Tale è appunto la Macchina, che l'Autore a voce mi ſpiegò; ſiccome ſi è detto nel principio; e la quale ci diſſe eſſere la ſua Macchina di Moto perpetuo. E inſieme ſe ne abbozzò il diſegno; il quale poi fu interamente formato; e dal medeſimo Autore approvato; anzi egli medeſimo lo delineò, o fece delineare; e me lo diede; e che ſerbo preſſo di me. Ed eſſo Autore più volte da me interrogato riſpoſe; eſſere in quel diſegno aſſai bene, ed appieno rappreſentata la ſua propria architettata Macchina. Queſto diſegno è riportato perappunto nella noſtra Figura della Tavola X. Dunque fu tal Macchina ſarà ragionamento. La Macchina è certamente di bella invenzione; e ſottilmente meditata. Dichiarerò ora le mie difficoltà, ed oppoſizioni intorno la medeſima.

FIG. I.

I. I due aſſi *AF*. e *AH*. o pure i due trapezj *PAFN*. e *PAHZ*. da una banda, e dall'altra i due canaletti *PO*. e *PR*. movendoſi; ſiccome ſi è detto; vicendevolmente all'insù, e all'ingiù; e movendoſi ſempre ſenza punto mai reſtare; come è neceſſario pel Moto perpetuo; e ſi raccoglie dalla formazione medeſima della Macchina giuſta la fattane deſcrizione; ſono come due pendoli di quà, e due di là; i quali ſempre oſcillano a vicenda. Si deve dunque fendere il mezzo reſiſtente dell'Aria. E ciò manifeſto. Or non riconoſco io in tal Macchina particolar forza per ſuperare tal reſiſtenza; oltre quella, che ſi richiede per la continua-

tinuazione del Moto. Onde ei parrebbe, che per tal cagione ſi dovrebbero a poco a poco tali corpi ridurre alla quiete. E' ben noto, quanta habbia poſſanza l'Aria di reſiſtere al moto de' corpi; e perciò finalmente di riporli in quiete. i quali altrimenti ſeguiterebbero ſempre a muoverſi. Così accade nel pendolo ſemplice, e volgare; che per tale impedimento, e per la frizione, che ſoffre nell'appiccagnolo; ma principalmente per la prima cauſa; ſi riduce alla quiete. E ſarebbe il pendolo ſenza tal impedimento la più vera, ingenua, e ſicura Macchina di Moto perpetuo; che ſi poteſſe ritrovare; dimoſtrandoſi nella Meccanica mattematicamente; che giunto il peſo d'eſſo pendolo all'infimo punto di diſceſa acquiſta ſempre ivi forza di riſalire ad un'altezza uguale a quella, donde principiò la caduta. I ſuddetti trapezi *PAFN.* e *PAHZ.* ſe non ſi voglion prendere come pendoli ſemplici, ſi prendan pure come compoſti; e ſarà una coſa medeſima.

E' vero, che in queſta Macchina volta per volta s' induce nuova forza pel moto ad eſſi trapezi, o aſſi; ed a i canali *PO*. *PR*. dalla palla, che vi ſcorre nell'eſtremitadi *O*. e *R*. Onde parrebbe, che ſi rinnovaſſero ſempre gl' impulſi; i quali potrebbero metter compenſo agl' impedimenti della reſiſtenza del mezzo. Ma tali impulſi, dico, non poſſono produrre tal' effetto; nè queſto loro appartiene. Servono ſolamente quelli, e le palle per far chè ſi muova il peritrochio *DQE*; ſenza cui queſto ſi ſtarebbe: e non han che far nulla con una diverſa forza, e ſpeciale, che ſuperi la reſiſtenza dell'Aria. Ancora i pendoli hanno continovi, e nuovi impulſi della gravità; maſſime nell'infimo punto di caduta, per ciò che ſi è detto; ma queſti fanno ſolamente, che il pendolo poſſa in ſu, e giù agitarſi. E non tolgon punto l'impedimento della renitenza dell'Aria. FIG. I.

II. Non mancano ſoffregamenti nella noſtra Macchina contrarii tutti ad un moto ſempre durevole. Queſti ſono uno principalmente in *A*. il quale equivale all'oſtacolo, che patiſce il Pendolo FIG. I

 nel

nel punto, o luogo di ſoſpenſione: dipoi altro conſimile è nel centro *L* del rocchetto. e nei denti delle ruote *DQE*. e *BC*. e in quelli del rocchetto *L*. e ſoprattutto negli zoccoletti z.z.z. ſparſi per tutta l'interiore circonferenza della rota *BC*. come ſi è detto; ne'quali tanto l'uno, quanto l'altro aſſe *GAF*. *IAH*. deve sì ſpeſſo urtare; e poi ſopra eſſi riſalire: di più nel ſoſtegno *P*. In ſomma queſta Macchina non è poco compoſta e di denti, e di vetti, e di canali, e di ruote. Onde al grand'oſtacolo; che pel Moto perpetuo naſce da ſofftegamenti; e che quaſi ſempre è non piccola cagione; per la quale non ſi poſſono conſeguire ſimil Macchine; è molto quella ſottopoſta. E' poi notiſſimo, che queſte frizioni difficiliſſimamente ſi poſſono con accuratezza ſtimare; e come dir ſi ſuole; ridurre a calcolo. Quindi è, che non ſi ritrova mai una contraria forza compenſatrice, e contranitente; ſicchè il mobile libero da quelle perſiſta nel moto, come dovrebbe.

FIG. I. III. In queſta Macchina; ſiccome appariſce dalla deſcrizione; opera ora l'una, ora l'altra di due bilancie; le quali ſono per vicenda il movente del Mobile perpetuo; che ſarebbe il peritrochio *DQE*. Vna ha un braccio *PO*. col peſo della palla *Y*. quando queſta giugne in *O*. e l'altro braccio *AF*. col peſo uguale *X*. attaccaro all'eſtremità *F*. E l'altra ha un braccio *PR*. col peſo della ſteſſa palla quando è in *R*. e l'altro braccio *AH*. coll'ugual peſo *X*. nell'eſtremo *H*. E' poi ſoſtegno comune *P*. Ora dunque ſi dice, che ſi moveranno ſempre e gli aſſi *AF*. *AH*. ed i canali *PO*. *PR*. per la fatta preponderazione nel coſtruirſi la macchina, del momento per *PO*; o per *PR* appetto al momento per *AF*; o per *AH*. intorno *P*; come ſopra, nella deſcrizione d'eſſa Macchina. Ma io ſoſtengo, che queſte bilancie non ſono ben conſtituite; e che perciò non vi può eſſere una giuſta, e coſtante preponderazione: e quindi non ſi potranno mai muover bene quei mobili; come ſi vorrebbe; ſe non per poco, e a riſalto: e che molto meno vi poſſa eſſere un moto durevole. Dunque in ciò conſiſte la fallacia della Macchina. Ne prenderemo una

di

di queſte due bilancie; eſſendo amendue; come ſi è veduto; del tutto ſimili. Queſta ſarà *HAPR*. E s'immagini già congionta la retta *PA*. come ſi diſſe nel principio.

IV. Già *PR*. non ſta in una, e la medeſima linea con *AH*. FIG. I. Biſogna dunque neceſſariamente così penſare, che ſtia la bilancia *HAPR*. cioè che ſia *PR*. un braccio col peſo della palla in *R*. quando la palla v'arriva; e *P*. il ſoſtegno; e l'altro braccio ſia *PZ*. a cui un trapezio *PZHA*. ſia coerente; e non pendente da qualche filo. Ora ſe il trapezio *PZHA*. ſi concepiſca come grave; e ſi ponga, che abbia due lati oppoſti *PZ*. e *AH* paralleli; onde ſia regolare; e ſi divida *PZ*. in due parti uguali in *e*. così pure *AH*. in due parti uguali in *m*; e ſi congionga *me*. la quale ſia partita in tre parti uguali in *b*. e *k*. e poi ſi faccia come la prima *AH*. alla ſeconda *PZ*. così la terza *bi*. alla quarta proporzionale Geometrica *ik*. ſarà *i*. centro di Gravità del trapezio; e la retta *em*. la linea del centro. Quindi, ſe ſia collocata *me*. perpendicolare all'orizonte; e il raggio *PR*, ſia maggiore del raggio *Pe*; ma il trapezio uguale di peſo al grave poſto in *R*. e ſi faccia la ſoſpenſione per *P*. o pure ſia *P*. un ſoſtegno; s'abbaſſerà *PR*. deſcrivendo col punto *R*. il cerchio *Rp*. intorno *P*. e s'inalzerà il trapezio *PAHZ*; deſcrivendo il punto *e*. per dove ſoſpeſo centralmente ſi conſidera il trapezio; parimente un cerchio *ef*. intorno *P*. ſendo che intorno *P*. prepondera *PR*. colla palla in *R*. in comparazione del trapezio. Ma il trapezio *PAHZ*. fu un grave immaginario ritrovato; dirò così; in favore della Macchina per ſalvare la bilancia, e quindi la preponderazione; benchè il raggio *AH*. non ſtia nell'iſteſſa linea col raggio *PR*. E potrebbe fare le veci del trapezio il grave *X*. nella bilancia; ſe non vi foſſero altre difficoltà. Primieramente il grave *X*. dovrebbe eſſere affiſſo non al punto *H* eſtremo dell'aſſe *AH*; come nella Macchina; ma al punto *m*. eſtremo della detta linea del centro *me*. normale all'orizonte, ſiccome ſi è detto; ſe ſi doveſſe coſtituire la

bi-

bilancia; di cui fosse un raggio $PZ$. che avesse un trapezio $PAHZ$. immaginario di soli quattro fila $PA$. $AH$.$HZ$. $ZP$. e senza gravità; ma che facesse le veci di quello un grave attaccatovi, ed altro raggio fosse $PR$. che sostenesse in $R$. l'altro grave da contrappesarsi col trapezio, o sia col grave affissatovi; e da preponderare.

FIG. I. V. In secondo luogo: ancorchè $X$. fosse ben collocato in $H$. dove s'intersegano il vette $AH$. e il filo $ZH$; e non vi fosse la considerazione del trapezio; non per tanto non si potrebbe ottenere questa bilancia; e non potrebbe giammai il peso $X$. far contrappeso colla palla $Y$. posta in $R$. e preponderare. Conciossiachè il peso $X$. non è libero pendente in $H$. pel filo $ZH$. dal raggio $PZ$. Vi è un' altra forza del vette, o asse $HAI$. dalla quale avrebbe a ricevere il grave $X$. un moto diverso da quello; che dovrebbe avere libero pendente dal filo $ZH$. acciocchè s' innalzasse, o s' abbassasse, quando s' abbassa, o s' innalza il braccio $PR$. col suo peso. Poichè mentre $AH$. volgesi intorno $A$. punto fisso dell' asse $AI$. in $A$. centro del peritrochio; si avrebbe a rivolgere ancora $PZ$. intorno il fermo sostegno $P$. secondo la Macchina. Dunque ricever dovrebbe il peso $X$. nel tempo medesimo due dissimili moti, uno di rivoluzione intorno $A$. per cui avrebbe a descrivere un cerchio col vette $AH$. e l' altro per l' insù, o per l' ingiù, con cui venir tirato ei dovrebbe, ed abbassato dal filo $ZH$. pel quale è sospeso; mentre $PZ$. gira intorno $P$. E ciò manifesto secondo questa Macchina; e siccome si riconosce dalla descrizione della medesima. E si vuole bilancia; perchè si dica di preponderazione del braccio $PR$. maggiore del braccio $AH$. essendo il peso della palla posta nell' estremità di $PR$. uguale al peso posto nell' estremita di $AH$. Nè si potrebbe in questo sistema ritrovar' altro principio, e altra cagione del moto fuori della spiegata bilancia. Ora io non intendo come nel modo narrato di quel contrasto, e contrannisò de' due diversi movimenti da imprimersi al grave $X$. nel medesimo tempo, possa giammai farsi moto in

que-

questa Macchina tale, che addivenga una preponderazione regolare; e di giusta, e vera bilancia: se non per poco, ed a rimbalzo; non che durevole, e continovo; siccome si diceva nel numero III. Di fatti sentiva io dire; che la Macchina non fosse mai stata condotta a fine, e compiutamente perfezionata.

VI. In due maniere potrebbero accadere i due suddetti diversi moti; ed imprimersi nello stesso tempo al grave *X*. La prima sarebbe, se il vette *IAH*. non girasse descrivendo cerchio intorno il punto *A*; ma scorresse avanti, e dietro per esso *A*. E allora il peso *X*. non si condurrebbe per dove si richiederebbe nella preponderazione di una giusta bramata bilancia. Si farà ciò manifesto, se si determinerà la traccia, che percorrerebbe *X*. o il di lui centro di gravità coll' impressione ricevuta di quei due diversi movimenti. Si ritrova così questa traccia. Rivolgasi intorno il centro *P*. del cerchio *BCD*. il di lui raggio *PN*. e nell' istesso tempo, e colla medesima celerità di moto equabile; quale esser deve in questo caso; sia condotto dall' estremo punto *N*. del raggio *PN*. il rigido, e teso filo *NH*. di lunghezza dato; il di cui estremo punto *H*. s' interseghi con altro filo, o altra regola *HAI*. che scorra avanti, e dietro pel punto fisso *A*. Si cerca la linea descritta dalle interfezioni *H*.

FIG. I.

FIG. II.

Si ritrovi pel suo moto *PN*. ora in *N*. e poi in *M*. sopra la periferia del cerchio: e *HAI*. ora in *H*. ora in *H*: e il filo *HN*. ora in *KN*. e ora in *HM*. siccome rappresenta la Figura seconda. Seghi dunque il filo *HN*. la periferia in *O*. quando si ritrova in *HN*. e la seghi in *Q*. quando giace in *HM*. Si congiungano le rette *OP*. *QP*. *NP*. *MP*. È chiaro, che gli archi di cerchio *OQ*. *NM*. percorsi nell' istesso tempo, e col medesimo moto equabile d' un medesimo filo sieno uguali. Quindi; aggiunto di comune l' arco *QBN*. sarà sempre la periferia *OBN*. uguale alla periferia *QBM*. onde la corda *ON*. sarà uguale alla corda *QM*. dunque sarà sempre data, e costante questa corda nel moto del raggio *PN*. e del filo *NH*. si prenda il filo posto in *HON*. e dal centro *P*.

 del

del cerchio si abbassi la normale $PK$. in $K$. sopra la corda $ON$. si unisca $HP$. sicchè sia formato il triangolo $HNP$. In questo triangolo è costante, e dato l' angolo $HNP$. Poichè nel triangolo $NKP$. è sempre dato, e costante il lato $KN$. metà della corda $ON$. sempre la medesima; come si è dimostrato. ed è dato ancora sempre il lato $PN$. raggio del cerchio dato; e l' angolo $NKP$ è retto. dunque sarà sempre dato, ed immutabile l' angolo $KNP$. o sia $HNP$. E dato ancora in esso triangolo $HNP$. il lato $PN$. e il lato, o filo sempre il medesimo $NH$. dunque sarà dato l' altro lato $PH$. e sempre il medesimo. Ma l' interfezione $H$. sta per appunto nell' estremo punto $H$. di $PH$. e il punto $P$. è punto fisso. Dunque l' interfezione $H$. o pure un grave; o sia il di lui centro posto in $H$. descriverà un cerchio intorno $P$. coll' intervallo $PH$. secondo que' due differenti moti. Quindi si è determinata la via, che segnerà il grave $X$. da que' due diversi, e sopra spiegati moti agitato. Ma è impossibile; che ciò quì accada; ed indi che si costituisca una bilancia con preponderazione; della qual bilancia un raggio sia $PR$. col peso in $R$. e l' altro; congiunta $PH$; sia $PH$. col peso in $H$. il qual raggio $PH$. faccia sempre angolo $HPR$. coll' altro raggio $PR$. sicchè mentre un raggio $PR$ s' abbassa descrivendo cerchio intorno $P$. l' altro $PH$. a vicenda s' innalzi descrivendo cerchio parimente intorno $P$. quando poi un' altro raggio $PZ$. descrive altro cerchio pure intorno $P$. Dunque non potrebbe sussistere in questa Macchina la bilancia colla preponderazione; se que' due suddetti moti fossero impressi al peso $X$. trascorrendosi liberamente avanti, e dietro dall' asse $AI$. il fisso punto $A$.

FIG. I.

FIG. I. VII. L' altra maniera sarebbe; se il Vette $HAI$, non scorresse avanti, e dietro pel punto $A$. ma si rivolgesse intorno $A$. fisso permanente; sicchè descrivesse un cerchio. E questo veramente si pone nella Macchina; come fu detto nella descrizione della medesima. E si è enunciata l' altra maniera per esporre tutti i ca-

i casi: ma neppure in questo modo pare, che possa farsi nella Macchina la richiesta durevole preponderazione. Sia fatta la preponderazione pel punto $Q$, nello scapo $AD$. di qualsivoglia bilancia; sicchè si debba alzare il braccio $QA$. dal cui estremo $A$. mediante un filo $NP$. penda il grave $P$. e debba abbassarsi l'altro braccio $QD$. dal di cui estremo $D$. sia pur sospeso mediante un filo $DI$. il grave $I$. ora il limite, che nell'alzarsi segnerà il centro di gravità del peso $P$; pel qual centro già s'intende sempre, che passi il filo; sarà un cerchio; il di cui centro $C$. si ritrova in $QK$. tirata dal punto $Q$. normale all'orizonte; ed è distante da $Q$. per $QC$. uguale alla lunghezza del filo: ed il raggio è $CP$. uguale al braccio $QA$. della bilancia. Si dimostra. Poichè sia preso una volta l'asse $AQD$ della bilancia posto orizontalmente: o sia presa altra retta linea $AQD$. in posizione orizontale pel punto $Q$. e sia fatta sopra la normale $QK$. in $Q$. la porzione $QC$. uguale al filo $NP$. Sendo che il filo $NP$. procede sempre à perpendicolo; si moverà sempre parallelo a $QK$. e quindi a se medesimo. Ma si potrà sempre congiungnere colla retta $PC$. il fisso punto $C$. e qualunque punto $P$. delle vestigia del centro di gravità del peso moventesi all'insù. e il braccio $QA$. passa sempre per $N$. e $Q$. descrivendo il cerchio intorno $Q$. mentre s'innalza il filo col peso; onde due rette linee $NP$. $QC$. parallele, ed uguali saranno sempre congiunte verso la medesima parte da due $NQ$, $PC$. Dunque $NQ$. $PC$. saranno sempre uguali, e fra loro parallele. e perciò $PC$. sempre costante; e uguale sarà al braccio $QA$. E sarà parallelogrammo $NPCQ$. Laonde il centro del peso $P$. pel cerchio determinato $PL$. sempre nell'alzarsi si dovrà portare.

FIG. III.

FIG. III.

FIG. III.

VIII. Concorda per appunto l'analisi algebrica. Conciosiachè; fatta la costruzione di sopra; da uno qualunque punto $P$. della via, per cui dovrebbe andare il centro del peso; e la quale si cerca; si tiri $PO$. parallela alla $AQD$. Sarà $PO$. per la costruzione normale in $O$. sopra $QK$. E gli angoli in $O$. e $O$. retti. E siano le ordinate $PO$. chiamate $y$. e le ascisse $QO$. sopra

FIH. III.

 la

la data di pofizione $QK$ dall' origine fiffa $Q$. fieno $x$. e il raggio dato $QN$. fia denominato $a$. e il dato filo $b$. dal quale fia fempre fegata $AQD$ in $T$. $T$. farà l' angolo in $T$. fempre retto, e $NT$. farà fempre $b - x$. Ma il quadrato di $NQ$. è fempre uguale a due quadrati di $NT$. e di $TQ$. dunque fi averà fempre $aa = bb - 2bx + xx + yy$. il quale è un luogo al cerchio; dovendofi neceffariamente coftruire colle ordinate ad angolo retto fopra il diametro. E fi coftruifce, e determina per l' appunto, come fopra nella foluzione fintetica fi fece.

Se il filo foffe uguale al braccio $QA$. della bilancia; allora il cerchio $PL$. defcritto dal pefo pafferebbe pel punto $Q$, dove gli farebbe tangente $AQD$. ficcome fempre gli è tangente il filo col pefo $P$. E fe il braccio $QA$. foffe maggiore del filo; allora il medefimo cerchio trapafferebbe la $AQD$. E farebbe la medefima cofa; come nella Figura fi fcorge. L' ifteffo poi in tutto fuccede ritrovato, e dimoftrato tanto colla fintetica, che coll' algebrica Geometria nell' altro raggio $QD$. che fi abbaffa nella bilancia. Poichè il centro del fofpefovi pefo $I$. defcrive andando all' ingiù un cerchio fomigliante onninamente al defcritto dal pefo $P$. che s' innalza: e il di lui centro fta pure nella normale $QK$. in diftanza da $Q$. uguale al filo $DI$. e il raggio è uguale al braccio, che fi abbaffa $QD$. con quefta fola differenza, che il centro del pefo afcendente rifale per la conveffa periferia; ma del pefo defcendente fi conduce per la concava del cerchio; giufta le cofe dette. E un filo $DI$. può effere maggiore, o minore dell' altro $NP$. e ancora a quello eguale; prendendofi pel grave pofto nell' eftremo della bilancia tutto infieme il filo col pefo attaccatovi. Accade così il tutto nella preponderazione di qualfivoglia bilancia, Ciò che non ho veduto, e faputo ritrovare trattato da altri.

FIG. III.

FIG. III.

IX. Ora nella noftra Macchina non è già pofta la diftanza $PA$. uguale al filo $ZH$. o $NF$. nè il vette $AH$. raggio del cerchio defcritto dal grave $X$. intorno $A$. fi fa uguale al braccio

FIG. I.

$PZ$.

*PZ*. della bilancia. Dùnque la femita del centro di *X*. non farà nell' innalzamento quella, che fi richiede nella preponderazione di bilancia; perciò, che è ftato dimoftrato. A tal cagione fi diffe nel Num. III. che non fi ritrovava in quefta Macchina una giufta, e coftante preponderazione: e fi affermò in quefto confiftere la fallacia della medefima. Tanto più, che; come apparifce dalla defcrizione della Macchina; non fu mente dell' Autor della Macchina, e fpiegazione fatta da lui intorno la medefima quella di confiderare la figura quadrilatera *ZHAP*. affiffa al braccio *PZ*. dello fcapo; con tutto il refto ragionato quindi proveniente; ma fu prodotta da noi invenzione per tor via l' affurdo di due braccia *PR*. *AH*, d' una bilancia, non meffe in una, e la medefima linea retta. (Num. IV.)

Conofco bene poterfi opporre a tali ragioni, non effer fempre neceffario in ogni preponderazione di bilancia, che il centro di gravità del pefo defcriva alzandofi, o abbaffandofi il fopra definito cerchio: ma folamente quando fta attaccato ad un filo libero pendente dal braccio della bilancia: il quale effere cafo fpeciale di preponderazione: del refto poter bene effo centro nella bilancia; che prepondera; percorrere altra via da quel cerchio per qualche particolar cagione di diverfo moto impreffo al pefo; oltre quello della bilancia preponderante; o per altra fimile: e quefto accadere nella prefente Macchina; in cui il pefo *X*. oltre il moto datogli per l' insù dal filo tirato dal braccio *PZ*; che s' innalza, e defcrive cerchio intorno *P*; riceve l' altro moto dal vette *AH*. aggiratofi intorno *A*. i quali due moti poffono bene efercitarfi. Ed effo pefo *X*. altro non fa, che difegnare intorno *A*. coll' intervallo *AH*. un cerchio; per dove fi porta. Ma non è la fopra determinata traccia circolare; effendo quella neceffaria folamente, quando è il filo libero cadente dal braccio della bilancia; e il grave è pel medefimo filo liberamente fofpefo. In fecondo luogo dir fi potrebbe, che quando ancor foffe neceffaria la via circolare determinata di fopra; per do-

FIG. I.

dove in ogni preponderante bilancia si dovesse il centro del grave condurre; facilmente s'affetterebbe questa Macchina; col far la distanza *PA*. uguale al filo; e la lunghezza del vette *AH*. uguale al raggio *PZ*. della bilancia. Tuttociò che si dice d' una bilancia di questa Macchina, s' intenda dell' altra appieno uguale. Siccome fu dichiarato nella fine del Num. III.

X. Ma rispondo. Egli è vero, che il peso *X*. que' due moti può ricevere; e coll' asse *AH*. in cui sia inserito, descriver cerchio intorno *A*. poichè possono due raggi *PZ*. *AH*. raggirarsi ognuno intorno il suo centro *P*. e *H*. descrivendo cerchio; benchè un teso filo, o lato *ZH*. li connetta; e li tiri; purchè però gli angoli in *P*. in *A*. in *H*. in *Z*. non sieno verun di loro costanti, e i medesimi; ma tutti mutabili, ora maggiori, ora minori; non pertanto non crederò in primo luogo mai, ancora fuori del caso di questa Macchina; poter quei due moti, e quel percorso limite circolare dal centro del peso nell' alzarsi convenire colla preponderazione di una stabile, legittima, e ben costituita bilancia; onde stimerò sempre, dover il peso col filo esser libero pendente dal braccio della bilancia: e principalmente in secondo luogo, mai non mi persuaderò, quei due moti, e quel tramite circolare poter convenire colla preponderazione di questa Macchina; messo insieme il tutto; e quella nuova sorta di mancante equilibrio; e quei due moti impressi al peso ascendente con quella non consueta via, per dove ei cammini; e la difficoltà di trovarsi volta per volta la palla *Y*. nell' estremo del braccio *PY*. quando, e come egli è d' uopo; e le tante parti, di cui è composta la Macchina; e 'l grand' impedimento, che dalle sì varie, e molte frizioni sopra mentovate proviene; massimamente dalla resistenza dell' aria: tanto più poi se 'l movimento debba esser continuo, e sempre durevole. Onde fermamente giudico, che non possa questa esser Macchina di moto perpetuo.

FIG. I.

FIG. I.

FIG. I.

*I L F I N E.*

## PROPOSITIO VIII. PROBLEM. I.

*Aliter*

Sint quae in ipſa propoſit. Quare datum ſit; aut ex datis quatuor Lineis rectis aptatum ſit Trapetium ACDB. ita ut circa circulum deſcribatur. Ponatur eſſe inſcriptus Circulus F E M N. cujus centrum Q. adjunctum ſit ad puncta F. E. M. N. contactuum rectis QF. QE. QM. QN. Nunc recta AQ. ſecans bifariàm datum angulum CAB. pervadet per Q. Non enim. Sed ſit illa AS. occurrens radio Circuli uni QF. in S. Jungatur ES. Igitur erit [ *hypoth. & conſtruction.* ] angulus AES. rectus. Et erat rectus AEQ. Ergo AQ. vadit per centrum Q. Et ſit illi in O. ad normam ducta BO. ex B. atq. ex O. ſit OG. parallela QF. occurrens AB. in G. Dein ex F. ſit FH. ad normam in H. ſupra AQ. Et dicantur datae AB. *a*. CD. *b*. DB. *c*. AO. *n*. OB. *m*. AG. *d*. GO. *e*. atque adſumitur AH. ignota *x*.

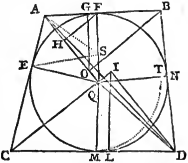



FIG. SUBJECTA.

Eſt AO. OB : : AH. HF. Inde erit HF. $= \frac{mx.}{n}$ Item AB. BO : : AF. FH Quare AF. erit $\frac{ax.}{n}$ Hinc FB. $=$ AB. $-$ AF. erit $\frac{an. - ax.}{n}$ Deinde habetur AG. GO : : AF. FQ. Unde erit FQ. $\frac{eax.}{nd}$ Et ſi circulus tangitur in E. & M. certo CQ. diſpertiens in duo datum angulum ACD. ducetur per Q. uti nuper oſtenſum id eſt de ſimili AQ. Agatur ex D. normalis DI. in I. ſupra CQ. atque ex I. normalis IL. in L. ſupra CD. Sintq. datæ rectæ CL. *f*. & LI. *g*. Eſt vero QM. [ *hypoth.* ] $=$ FQ. Et habetur CL. LI : : CM. MQ. Quare CM. prodibit $\frac{feax.}{gdn}$ Et MD $=$ CD $-$ CM. erit $\frac{gdnb - feax.}{gdn}$ Sed circulus tangitur [ *hypoth.* ] in N. & M. Hinc MD. erit $=$ DN. uti & DQ. ſecans bifariam ang datum CDB. pervadet per Q. uti ſupra. Igitur habetur DN $= \frac{gdnb - feax}{gdn} =$ DB $-$ BN $=$ DB $-$ BF. ( *hypoth.* ) $= \frac{nc - an + ax}{n}$ Et componatur

natur aequatio; eritque $x = \frac{bgdn - gdnc + gdan.}{fea + gda}$ Quae est quarta Geometrica post $fea + gda$. & $ngd$. & $b - c + a$. qui tertius terminus est semper positivus; cum ob conditionem problematis sit $a + b = c +$ AC. inde $a + b$. semper major erit $c$. Igitur sumatur super recta AQ. dividente bifariam angulum CAB. portio AH. aequalis inventae $x$. sitque HF. normalis in H. supra AB. & FQ. ad normam ex F. ducta occurret AQ. in puncto Q. unde ducta normalis ad unum ex lateribus trapetii erit semidiameter Circuli quaesiti; & $= \frac{ebg - egc + ega.}{fe + gd}$ Nam fuit FQ. radius $= \frac{eax.}{dn}$ Erit igitur intersectio Q. centrum. Et semidiameter quarta Geom. post $fe + gd$. & $eg$. & $b - c + a$. Haec enim ponebantur.

S C H O L I U M

Juxta hunc modum noscitur quaesiti Circuli centrum manere in concursu Q. duarum AQ. DQ. dividentium bifariam angulos ex adverso A. & D. Item radius est normalis ducta ex Q. ad unum latus constituti trapetii; plane sicuti alio modo; & alia analysi non algebrica propositionis. Datur casus esse CD = DB. [*ex dict. in prop.*] sive esse $b = c$. Et tunc erit $x = \frac{gdn}{fe + gd}$ Et semidiameter $= \frac{eag}{fe + gd}$ nempe quarta Geomet. post $fe + gd$. & $ea$. & $g$.

Si non datum sit trapetium; sed datae Lineae, ex quibus illud componatur; potest quidem componi quibusvis angulis; sed dato uno, ut lubet, accepto B. dantur reliqui. Nam componetur Figura sumptis; uti oportet; adjacentibus lateribus AB. BD. quae dantur. Et juncta AD. dabitur: (quaequidem cum AC. & CD. debet facere posse triangulum. Qua norma sumendus est angulus in B.) & dabitur triangulum ABD inde dabitur aliud ACD. constituens cum ABD. trapetium. Quare educatur ex D. ad datum angulum ADC. latus quale esse debet DC. & si jungatur AC. erit paratū, quod circa circulū describatur trapetium. Hacq. ratione dictum est in proposit. datis lateribus, & dato mutuo eorum positu; dari illius angulos. Nam unus angul. sumitur datus; & inde reliqui dantur; quia latera dantur. Ita igitur componetur trapetium ex quatuor lineis datis circa circulum describendum.

Alter hic modus, analysis algebricae non modo datam praebet Circuli quaesiti diametrum; quod efficit & simplex antiqua analysis; sed etiam praestat illam cognitam per proportionem ad alias rectas datas; uti liquet. Cujusmodi emolumentis algebrica analysis fere semper alteri antecellit.

## SCHOLIUM II.

Exemplum praebebitur compositionis trapetii ex quatuor rectis Lineis datis; quod trapetium circa circulum describatur. Sint igitur quatuor rectae Lineae datae 10. 17. 26. 19. quarum tres omnifariam acceptae sunt majores reliqua; & quarum duae simul sumptae 19. & 17. sunt aequales duabus simul 10. & 26. quas duas conditiones jubet quidem Proposit. ipsa VIII. Igitur adjacentia latera duo sunt 19. & 26. uti exem. causs. AB. & DB. [*ead. Fig.*] & alia duo adjacentia sint 10. & 17. uti AC. & CD. Nunc si connectantur AB. & DB. angulo ABD. ita ut basis AD. sit 27. scilicet sit summa 10. & 17. aliorum duorum laterum; quae summa est minor quàm 19. & 26. [& semper una est minor summa laterum duorum adhaerentium; & altera summa est major aliorum duorum adhaerentium laterum; etiamsi ex datis rectis Lineis sint duae aequales inter se; & aliae duae inter se aequales; vel inaequales; qui casus sane esse possunt; sicuti in Proposit.]; tunc profecto efficietur quidem triangulū ex AB. ex DB & AD. non vero ex 10. & 17. sive AC. & CD. & 27. vel AD. [22. 1. Elem.] & multo magis id eveniet, si AD. sit magnitudinis majoris, quàm 27. & sit quidem minoris quàm 19. simul cum 26. nam faciet illa triangulum cum 19. & 26. sed non cum 10. & 17. Debet igitur esse AD. minor quàm 27. & tunc necessario cum utraque laterum adjacentium summa efficere poterit eadem AD. triangulum; si facit illud cum summa minori. Itaque sit AD. 20. minor quàm 27. sed non sit ipsa AD. magnitudinis minoris quidem quàm 27. sed quae cum 10. & 17. non faciat triangulum; quales forent 7. aut 6. aut 5. & reliquae minores quàm 7. Et igitur tantus sit angulus ABD. (*Schol. I.*) ut basis AD. sit 20. Et fiet id per 24. 1. Element. Augeatur enim angulus; vel imminuatur; donec data basis fiat quaesita. Et eadem erunt; si ex quatuor datis rectis Lineis compositurís trapetium circa circulum describendum duae sint aequales inter se, & duae inter se aequales. Uti 5. 5. 8. 8. vel etiam duae inter se aequales, & duae inaequales: uti 5. 5. 7. 3. primo enim casu duo adhaerentia latera erunt 5. 5. & duo adhaerentia 8. & 8. atque secundo casu duo adjacentia erunt 5. & 7. et duo adjacentia 5. & 3. Sicuti in Proposit. edictum est. Et eadem advenient, quae hic nuper dicta sunt; sicut patet.

Jam

Jam vero conſtituto hoc modo triangulo ABD. deinde ex datis tribus rectis Lineis 10. 17. & 20. ſeu AD. uti ſupra; conſtituatur juxta conſtructionem ipſius Propoſit. 22. 1. Elem. triangulum ACD. ſuper AD. indefinitè hinc, & hinc producta; & performatum erit exoptatum trapetium ADBC. circa circulum deſcribendum. Ita igitur quaecunq. datae rectae Lineae ſint idoneae trapetio deſcribendo circa circulum; illud ſemper componetur.

Facilius autem idem adſequemur, ſi utrumque triangulum tàm ABD. quàm ACD. ex quibus eſt conflandum trapetium; deſcribatur; ſervatis, quae explicata, & imperata nuper ſunt; per ipſam eandem 22. 1. Elem. Itaque ex tribus datis rectis lineis 19. 26. & 20. quarum eſt 20. tertia accepta modo imperato nova recta linea pro baſi trianguli utriuſque; ſcilicet pro diagonali trapetii; conficiatur triangulum ABD. Et deinde aliud; quemadmodum nuper dicebatur; conſtituatur triangulum ACD. ſupra AD. hinc & hinc producta [22. 1. Elem.] Et factum erit quod quaerebatur.

Eadem eſt diſciplina de quovis trapetio conficiendo ex quatuor datis rectis Lineis; quarum tres quaecunq. ſint majores reliqua; etiamſi non ſit trapetium circa circulum deſcribendum. Nam ſint rectae lineae 2. 6. 3. 4. Et conſtituatur; per tradita; triangulum ex 2. 4. & 5. [non quidem ex 2. 4. & 3. Nam fiet quidem triangulum ex 2. 4. & 3. at non ex 6. 3. & 3.] deinde; uti edictum eſt; conſtituatur alterum triangulum ex 6. 3. & 5. Et habebitur trapetium: & ita ſemper. Igitur patet; ſi datum ſit jam conſtitutum quodvis trapetium; eſſe ſane in illo tria latera quaevis majora reliquo; quod ſi trapetium ſit deſcribendum circa circulum; eſſe ampliùs duo oppoſita latera ſimul addita aequalia duobus oppoſitis ſimul additis; at ſi non datum ſit trapetium; ſed datae quatuor rectae ſint; uti oporret; ex quibus conflandum ſit trapetium aut quodcunq. aut deſcribendum circa circulum; tunc non ſufficere prædictas conditiones adpoſitas rectis Lineis datis; verùm ampliùs in ipſorum laterum poſitionem; ſeu; quod idem eſt; in illorum angulos [cognito vero, & dato uno angulo, dantur reliqui; ex dictis] curam eſſe conjiciendam; ut rectè performetur trapetium; neq. poſſe illud ut libet cunq. efformari. Quod conſtat per hactenus dicta.

*D. IANVARIVS MARIA DEL PEZZO PRAEPOSITVS GENERALIBVS CLERIC. REGVLAR.*

HOc Opus inscriptum Problemata Varia Mathematica a R. P. D. Iohanne Baptista Caracciolo nostrae Congregationis Theologo, & in Pisana Academia Pubblico Matheseos Professore compositum, & iuxta assertionem Patrum, quibus id commisimus approbatum; ut Typis mandetur; quoad Nos spectat; facultatem concedimus. In quorum Fidem praesentes litteras manu propria subscriptas, & solito nostro Sigillo munitas dedimus. Neapoli in nostris Aedibus S. Pauli Maioris. Die 15. Octobri Anno 1754.

*Dominus Ianuarius Maria del Pezzo*
*Praeposit. Gener. Cleric. Regul.*

✠

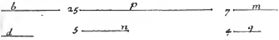
D. Raphael Venturini C. R. Secret.

## *ERRATORVM EMENDATIONES.*

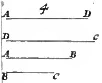
*Pag.* 4. *linea* 20. $- \frac{bbxx}{cc} + aacc - 2acbx + bbxx$. *Emendetur* $\frac{-bbxx + aacc - 2acbx + bbxx}{cc}$ ‖ *Pag.* 10. *lin.* 24. $2aa - dd$ | $aa - dd$ ‖ *ibidem lin.* 25. $2aa - dd$ | $aa - dd$ ‖ *Pag.* 13. *lin.* 28. ſic | ſit ‖ *Pag.* 14. *lin.* 8. Ignota vero | Recta vero ‖ *Pag.* 17. *lin.* 2. maiores reliqua | ( *Schol. Ppopoſit. I.* ) ‖ *ibid lin.* 16. erit $= EH + AE + N$ | erit $= EH - AE + N$ ‖ *Pag.* 20. *lin.* 14. vertet | verrex ‖ *Pag.* 24. *lin ultima* $AO . AF :: MC . ML.$ | $AO . AF :: MC . MI$ ‖ *Pag.* 46. *lin.* 7. latu | caſu ‖ *Pag.* 47. *lin.* 12. ab parabolam | ob parabolam ‖ *Pag.* 48. *lin.* 18. ſecundus terminus | tertius terminus ‖ *Pag.* 54. *lin.* 3. Parabola | parabolam ‖ *Pag* 57. *lin.* 23. rectae | rectè ‖ *Pag.* 63. *lin.* 1. denominatur | denominetur ‖ *ibid. lin.* 18. diamerer | axis ‖ *Pag.* 70. *lin.* 28 IV. | VI. ‖ *ibid.* aedem | caedem ‖ *Pag.* 71. *lin.* 10. num. I. | initio lemmatis ‖ *Pag.* 72. *lin.* 32. ſecundum | ſecundam ‖ *Pag.* 80. *lin. ultima* ipſi $AC$ | ipſi $AIS$ ‖ *Pag.* 84. *lin.* 12. huius | huic ‖ *Pag.* 92. *lin.* 20. Fig. XVII. | Fig. XVIII. ‖ *Pag.* 98. *lin.* 27. plena | plana ‖ *Pag.* 115. *lin.* 7. $- \frac{cb}{r} \sqrt{2rx - xx}$. | $+ \frac{cb}{r} \sqrt{2rx - xx} . dx$. ‖ *Pag.* 116. *lin.* 9. $\frac{ccx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r} \sqrt{2rx - xx}$ | $\frac{crx.dx}{r} - \frac{cxx.dx}{2r} + \frac{cb}{r} \sqrt{2rx - xx} . dx$. ‖ *Pag.* 121. *lin.* 11. Ipomochlio | Ipomoclio.

Problem.^u I.

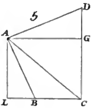
2




4



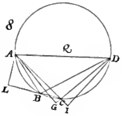

5




7



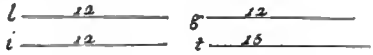

8




12



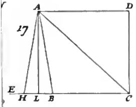

13



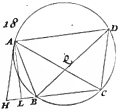

14

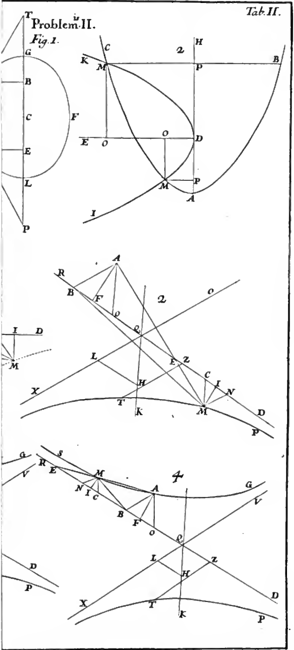



17

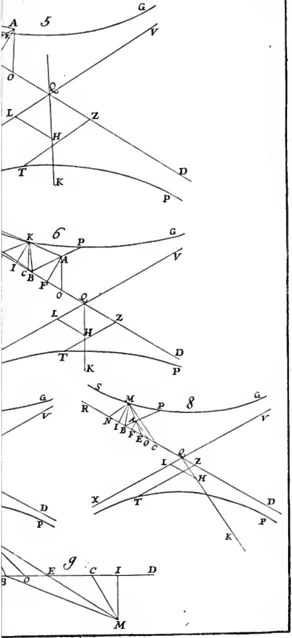



18



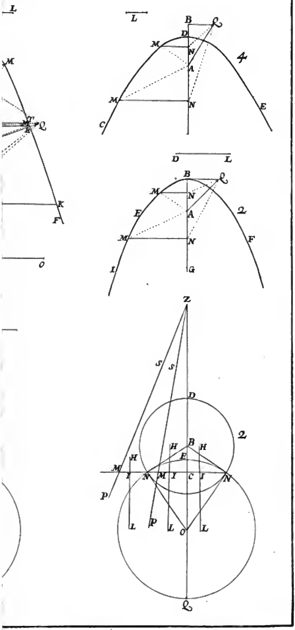

Tab. II.
Problem II.
Fig. 1.
2
2
4

Tab. III.

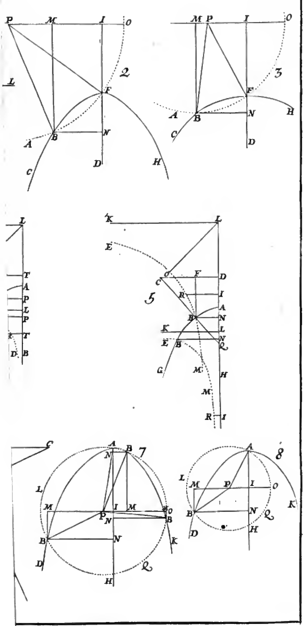


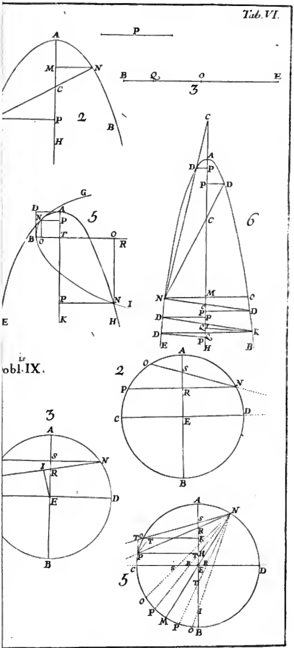
Probl. IV.

Tab. IV.



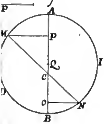
Tab. V.



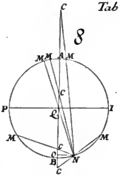

Tab. VI.
obl. IX.

Tab. VII.

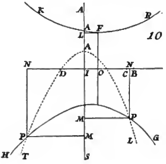
7



8

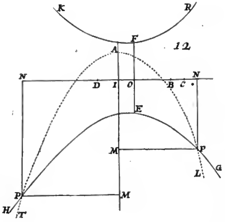


10

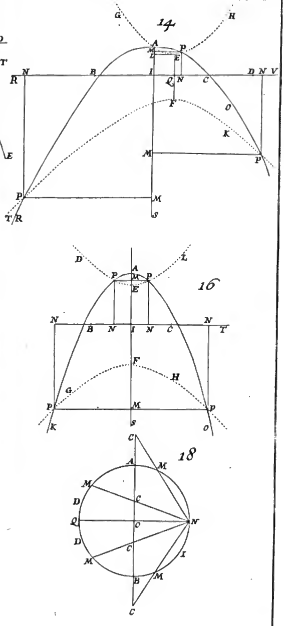




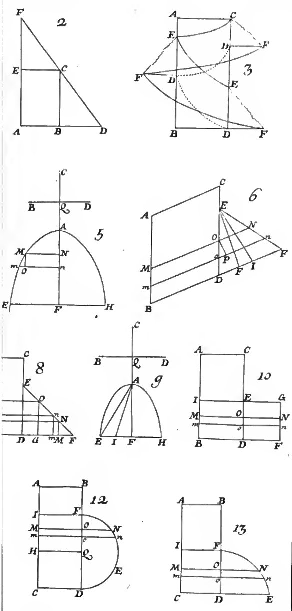
12

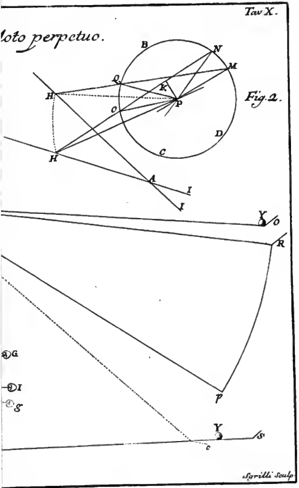


Tab. VIII.



Probl$^{is}$ X. Tab. IX.




Tav X.
loto perpetuo.
Fig. 2.
B
N
M
Q
K
H
O
P
D
H
C
A
I
I
Y
o
R
G
I
g
p
Y
S
c
Sgrilli Sculp